Solución del Problema 11: Unicidad de solución de la Ecuación de Ondas

11.- Demuéstrese la unicidad de solución del problema de la ecuación de ondas con condiciones de frontera homogéneas:

$c^2 u_{xx} = u_{tt}$, $0 < x < \ell$; $t > 0$ y condiciones iniciales: $u(x,0) = f(x)$; $0 < x < \ell$, y $u_t(x,0) = g(x)$; $0 < x < \ell$. Considérese el funcional de energía:

$$I(t) = I(t,w) = \frac{1}{2} \cdot \int_0^\ell \left(w_x^2 + \frac{1}{c^2} w_t^2 \right) dx$$

Solución:

Consideremos que hay dos soluciones $u_1(x,t)$ y $u_2(x,t)$ y sea $w(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$.

Nuestro objetivo es demostrar que $u_1(x,t)$ es igual que $u_2(x,t)$, o lo que es lo mismo que $w(x,t) = 0$. Esta función, $w(x,t)$ es la que aparece en el funcional de energía $I(t) = I(t,w)$. Además $w(x,t)$ es solución del problema homogéneo asociado al dado en el problema: la misma EDP pero con todas las condiciones, de contorno e iniciales homogéneas.

Por definición del funcional de energía, al ser la integral definida en un intervalo recorrido en sentido positivo, de una función que es suma de cuadrados, se tendrá que $I(t) \geq 0$ para todo *t*.

Además $\dfrac{dI}{dt} = \dfrac{1}{2} \cdot \int_0^\ell \left(2 w_x w_{tx} + 2 \dfrac{1}{c^2} w_t w_{tt} \right) dx$, donde mediante integración por partes: tomando

$$\left.\begin{array}{l} u = w_x \\ dv = w_{tx} dx \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} du = w_{xx} dx \\ v = w_t \end{array}\right\} \text{ se tiene } \frac{dI}{dt} = w_x w_t \Big]_0^\ell - \int_0^\ell \underbrace{\left(w_t w_{xx} - \frac{1}{c^2} w_t w_{tt} \right)}_{=0} dx = 0$$

Nótese que en la última expresión se tiene que $w_t(0,t) = 0 = w_t(\ell,t)$ lo que hace que el primer sumando sea cero, mientras que la última integral se hace cero porque la función subintegral es cero, pues $c^2 w_{xx} = w_{tt}$, $0 < x < \ell$; $t > 0$.

Por tanto como $\dfrac{dI}{dt} = 0$, resulta que $I(t)$ es constante. Veamos su valor para $t = 0$:

$$I(0) = I(0,w) = \frac{1}{2} \cdot \int_0^\ell \left(w_x^2(x,0) + \frac{1}{c^2} w_t^2(x,0) \right) dx = \frac{1}{2} \cdot \int_0^\ell w_x^2(x,0)\, dx$$

ya que $w_t(x,0)=0$, por las condiciones iniciales. Integrando por partes la última integral, con

$\left.\begin{array}{l} u=w_x \\ dv=w_x dx \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} du=w_{xx}dx \\ v=w \end{array}\right\}$ se tiene $I(0)=\frac{1}{2}\left[w(x,0)\,w_x(x,0)\right]_0^{\ell}-\frac{1}{2}\int_0^{\ell} w(x,0)\,w_{xx}(x,0)\,d\,x=0$

Pues $w(0,0)=0=w(\ell,0)$ por las condiciones de contorno, y $w(x,0)=0$ por las condiciones iniciales, y en resumen, $I(0)=0$.

Como $I(t)\geq 0$ para todo *t*, constante y además $I(0)=0$, resulta que $I(t)=0$ para todo *t*. De ahí que $w_x^2+\frac{1}{c^2}w_t^2=0 \quad \Rightarrow \quad w_x=0, \quad w_t=0$. Esto implica que $w(x,t)$ es constante y por las condiciones de contorno e iniciales, esa constante ha de ser CERO, como queríamos demostrar.