Deducción de la Ecuación de Ondas en una dimensión

Modelar el flujo de partículas en un río a través de su habitual camino de tierras no es realmente tan difícil ya que básicamente el flujo es casi constante.
Es sólo cuando el río se cruza con otros ríos o el momento en que llega al final de su viaje cuando el flujo de partículas da el cambio.
Cuando los ríos o canales están llegando a su final que puede ser un lago o el océano, hay otros efectos presentes.
El flujo es más irregular y normalmente no es constante en estas situaciones.
En estas circunstancias, es posible observar los cambios en el flujo, así como la dirección del flujo de las partículas que son de seguimiento.
Otras aplicaciones comunes de la ecuación de onda, la participación de modelado de las vibraciones de una cuerda. Nosotros vamos a obtener la ecuación de ondas mediante ese modelado.

Derivación de la ecuación de onda
Vamos a proseguir el estudio de una cuerda que vibra en primer lugar y haciendo una simplificación de nuestro problema en aproximadamente una dimensión. Esto no es del todo realista basado en el hecho de que una cuerda tiene una pequeña sección transversal y se puede considerar casi delgado como una línea.
Por lo tanto, esta simplificación no es demasiado grave.
Vamos a estudiar esta cuerda solamente bajo la influencia de sus fuerzas internas. Por lo tanto, la gravedad u otras fuerzas externas (fricción) no se tendrán en cuenta para este cálculo.

Vamos a presentar primero la notación de las variables que se estudian aquí:
u(x,t) → es el desplazamiento de la cuerda con respecto a x y t.

θ(x,t) → el ángulo entre la cuerda y en el horizontal x y t

T(x,t) → la tensión en la cuerda en el lugar x y el momento t

ρ(x) → la densidad de la cuerda
Como de costumbre la idea principal detrás de cualquier derivación utilizando la mecánica es buscar en las fuerzas que actúan sobre un cuerpo. Empezaremos por la aplicación de la segunda ley de Newton que dice que masa por aceleración es igual a la suma de todas las fuerzas que actúan sobre un cuerpo,

Masa· aceleración=suma de fuerzas que actúan en un cuerpo.

Empecemos por encontrar las expresiones de cada una de las cantidades anteriores.

Dirección vertical: Consideramos una pequeña sección de la cuerda Δx con densidad ρ(x). Entonces, la masa de la sección de la cuerda es

$$m = \text{densidad}\cdot\text{longitud} = \rho(x)\sqrt{\Delta x^2 + \Delta u^2}.$$

Sabemos también que cualquier organismo cuya posición sea x la aceleración es $\partial^2 u/\partial t^2$. Por lo tanto, la fuerza de Newton en la dirección vertical da:

$$m\cdot a = \rho(x)\sqrt{\Delta x^2 + \Delta u^2}\cdot \partial^2 u/\partial t^2.$$

Ponemos juntas todas las fuerzas en la dirección vertical que actúen sobre nuestra cuerda, nos queda:

$$\rho(x)\sqrt{\Delta x^2+\Delta u^2}\cdot \partial^2 u/\partial t^2 = T(x+\Delta x,t)\sin\theta(x+\Delta x,t) - T(x,t)\sin\theta(x,t)$$

Dividimos por Δx y queda la siguiente ecuación:

$$\rho(x)\sqrt{1+\frac{\Delta u^2}{\Delta x^2}}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{T(x+\Delta x,t)\sin\theta(x+\Delta x,t) - T(x,t)\sin\theta(x,t)}{\Delta x}.$$

Tengamos en cuenta que el lado derecho de lo anterior es en realidad un finito Tsinθ de diferencia con respecto a x.
En ese sentido la participación de todos los términos Δ real se convertirá en derivados, si hacemos tender Δx→0.
Aplicando Δx→0 sobre la ecuación anterior obtenemos algo que se asemeja a una ecuación diferencial:

$$\rho(x)\sqrt{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\big(T(x,t)\sin\theta(x,t)\big)$$

Por tanto, el producto de la regla de la mano derecha de lo anterior se convierte en:

$$\rho(x)\sqrt{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial T(x,t)}{\partial x}\sin\theta(x,t) + T(x,t)\cos\theta(x,t)\frac{\partial\theta(x,t)}{\partial x}$$

Vemos que esta ecuación tiene demasiadas variables y, por tanto, no es muy útil.
Trataremos de simplificar cuanto sea posible.

Es cierto que

$$\tan\theta(x,t) = \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$$

y que

$$\theta(x,t) = \tan^{-1}\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right)$$

Teniendo la tita (x,t) derivada por encima da,

$$\frac{\partial\theta(x,t)}{\partial x} = \frac{\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}}{\sqrt{1+(\frac{\partial u(x,t)}{\partial x})^2}} \quad \cos\theta(x,t)$$

Del mismo modo sacamos las relaciones siguientes:

$$\sin\theta(x,t) = \frac{\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}}{\sqrt{1+(\frac{\partial u(x,t)}{\partial x})^2}} \quad \cos\theta(x,t) = \frac{1}{\sqrt{1+(\frac{\partial u(x,t)}{\partial x})^2}}$$

Estas fórmulas pueden utilizarse para eliminar todos los θ de la ecuación principal.
El resultado es correcto pero muy engorroso para trabajar.
En lugar de eso, haremos algunas otras hipótesis de simplificación que puede reducir drásticamente nuestro modelo.

Principal hipótesis: supongamos que θ(x,t) es muy pequeño (θ(x,t)≈0). Entonces

tan θ(x,t) ≈ θ(x,t) y también $\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \approx 0$. Por lo tanto, una serie de términos en nuestras anteriores relaciones nos permitirán simplificar de la siguiente manera:

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2} \approx 1, \quad \sin\theta(x,t) \approx \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}, \quad \cos\theta(x,t) \approx 1, \quad \frac{\partial \theta(x,t)}{\partial t} \approx \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$$

Por lo que, nuestra ecuación se convierte en:

$$\rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial T(x,t)}{\partial x}\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + T(x,t)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \quad (3.32)$$

Tenemos un último problema: dos incógnitas T y U y una ecuación. Pero, tenemos que recordar que todavía no hemos puesto en uso la equivalente formulación de la dirección horizontal ...
Dirección horizontal: Las fuerzas en la dirección horizontal son iguales a cero ya que el movimiento no se está llevando a cabo.
Como resultado de ello:

$$T(x+\Delta x,t)\cos\theta(x+\Delta x,t) - T(x,t)\cos\theta(x,t) = 0.$$

Una vez más, dividiendo por Δx y Δx→0, podemos obtener una forma diferencial de esta ecuación:

$$\frac{\partial}{\partial x}(T(x,t)\cos\theta(x,t)) = 0 \quad (3.33)$$

Dado que, como hemos mencionado anteriormente cosθ)≈1 para los pequeños θ luego por encima de la T(x,t) implica que debe ser una constante en lo que respecta a x. Por lo tanto T (x, t) es una función sólo de t.
Así que, sobre la base de nuestra búsqueda en 3.33, podemos revisar la ecuación 3.32 de la siguiente manera:

$$\rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T(x,t)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$$

Suponiendo ahora que tanto la densidad ρ como la tensión T son constantes podemos obtener una ecuación de ondas,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \nu \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \quad (3.34),$$

donde v=T(x,t)/ ρ(x). Tenga en cuenta que la hipótesis de que la densidad ρ(x) es una constante y no depende de x es realista con respecto a los materiales más comunes.

Del mismo modo, la tensión T también puede ser asumida como una constante en el caso de las guitarras, ya que no hace realmente un cambio de la tensión de la guitarra mientras se reproduce. Como resultado de ello es nu por lo general una constante.

Judith Viera Santana

Bibliografía:

Aunque en un principio había sacado la información de un libro, en esta página estaba bastante más detallado y más claro el procedimiento por lo que saqué todo el trabajo de este enlace:

http://www.math.umass.edu/~sopas/Teaching/Spring2006/Math456/SP2006NOTES/

waveder.pdf