Universidad de Las Palmas de Gran Canaria

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

E.T.S.I.T. – 2º CURSO/CURSO de ACCESO
AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS / MATEMÁTICAS
CONVOCATORIA ORDINARIA
EXAMEN GLOBAL
Profesor A. Plaza 29.01.02

TIEMPO ESTIMADO: 2 horas, 30' (en dos partes de 1 hora, 15'; con descanso de 10 minutos)

INSTRUCCIONES PARA LA REALIZACIÓN DE ESTE EXAMEN

1. Colocar el **DNI** en lugar visible.
2. No está permitido salir de clase durante el examen.
3. El alumno tampoco podrá abandonar su asiento: si necesita más folios, o desea hacer alguna pregunta al profesor, debe levantar el brazo.
4. No se permite el uso de calculadora.
5. Comenzar cada ejercicio en hoja aparte. Escribir nombre y apellidos en todas las hojas.

PRIMERA PARTE

(1.0 p.) **1.-** Considerar el problema de valor inicial

$$zz_x + yz_y = z\,,\ \text{siendo}\ z = \text{constante}\ \text{sobre la curva inicial}$$

C: $x = t,\ y = t;\ 0 < t < +\infty$. Determinar si el problema tiene solución y cuántas.

(3.0 p.) **2.-** Resuélvase por el método de separación de variables el siguiente problema:

$u_t = u_{xx} + sen\pi x,\ 0 < x < 1;\ t > 0$, con condiciones de contorno nulas y condiciones iniciales: $u(x,0) = 1;\ 0 < x < 1$.

(1.0 p.) **3.-** Enunciar el principio del máximo de las funciones armónicas y emplearlo para demostrar la unicidad de solución del problema de Dirichlet de la ecuación de Laplace.

SEGUNDA PARTE

(2.0 p.) **4.-**

a) Dar un ejemplo (si es posible, o en caso contrario demostrar que no existe) de una función holomorfa en todo el plano y tal que sus derivadas en el punto i, sean $f^{(n}(i) = 3^n$.

b) Dar razonadamente un ejemplo (o demostrar que no existe) de una función f holomorfa en todo el plano complejo y tal que el conjunto $Z(f) = \{z \text{ tal que } f(z) = 0\}$ sea $Z(f) = \left\{\frac{1}{n} \text{ con } n \in Z\right\}$.

(2.0 p.) **5.-** Aplicar la integración en el plano complejo para hallar:

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt[4]{x}}{x^2+1}\,dx$$

(1.0 p.) **6.-** Definir convolución de dos señales de tiempo discreto y usar la definición de transformada z para demostrar el teorema de convolución de la transformada z.

Las notas serán publicadas el viernes 1 de febrero.
LOS EXÁMENES PUEDEN VERSE EL LUNES 4 EN HORARIO DE TUTORÍAS (10-14 HORAS), O EL MARTES 5 DE 10 A 12 HORAS EN EL DESPACHO D-39 DEL EDIFICIO DE MATEMÁTICAS E INFORMÁTICA.

SOLUCIONES

PRIMERA PARTE

(1.0 p.) **1.-** Considerar el problema de valor inicial

$$zz_x + yz_y = z\,,\ \text{siendo } z = \text{constante sobre la curva inicial}$$

C: $x = t,\ y = t;\ 0 < t < +\infty$. Determinar si el problema tiene solución y cuántas.

(3.0 p.) **2.-** Resuélvase por el método de separación de variables el siguiente problema:

$u_t = u_{xx} + sen\pi x,\ 0 < x < 1;\ t > 0$, con condiciones de contorno nulas y condiciones iniciales: $u(x,0) = 1;\ 0 < x < 1$.

SOL: Al separar variables en la ecuación homogénea asociada e imponer las condiciones de contorno nulas se obtienen las autofunciones iones $X_n(x) = \operatorname{sen} n\pi x,\ 1 \le n$. Por tanto se busca una solución del problema propuesto de la forma $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \operatorname{sen} n\pi x,$ donde las funciones $T_n(t)$ se determinarán de sustituir la expresión anterior en la EDP inicial e imponer la condición inicial. Es decir, hay que resolver los problemas de valor inicial siguientes:

$T_n'(t) + n^2\pi^2 T_n(t) = a_n$ donde $a_n = 1$ si $n = 1,$ y $a_n = 0$ en otro caso.

Con condiciones iniciales: $T_n = 0$ si $n = 2k,$ y $T_n = \dfrac{4}{n\pi}$ si $n = 2k+1.$

Resolviendo los problemas de valor inicial anteriores se obtiene el resultado:

$$u(x,t) = \left[\frac{4}{\pi}e^{-\pi^2 t} + \left(1 - e^{-\pi^2 t}\right)\frac{1}{\pi^2}\right]\operatorname{sen}\pi x + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{2n+1}e^{-(2n+1)^2\pi^2 t}\operatorname{sen}\left((2n+1)\pi x\right)$$

(1.0 p.) **3.-** Enunciar el principio del máximo de las funciones armónicas y emplearlo para demostrar la unicidad de solución del problema de Dirichlet de la ecuación de Laplace.

SEGUNDA PARTE

(2.0 p.) **4.-**

a) Dar un ejemplo (si es posible, o en caso contrario demostrar que no existe) de una función holomorfa en todo el plano y tal que sus derivadas en el punto i, sean $f^{(n}(i) = 3^n$.

Por el desarrollo de Taylor se tiene:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n}(i)}{n!}(z-i)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{n!}(z-i)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n(z-i)^n}{n!} = e^{3(z-i)}$$

y es claro que la función así definida es holomorfa en todo el plano complejo.

b) Dar razonadamente un ejemplo (o demostrar que no existe) de una función f holomorfa en todo el plano complejo y tal que el conjunto $Z(f) = \{z \text{ tal que } f(z) = 0\}$ sea $Z(f) = \left\{\frac{1}{\text{n}} \text{ con } n \in Z\right\}$.

El segundo teorema de identidad implica que una función como la anterior es nula en todo el plano complejo.

(2.0 p.) **5.-** Aplicar la integración en el plano complejo para hallar:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sqrt[4]{x}}{x^2+1} dx$$

La integral que se pide es un caso particular de: $\int_0^{\infty} \frac{x^{\alpha}}{x^2+1} dx$. Considerando el recinto de integración de la figura, se tiene que la integral buscada verifica:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sqrt[4]{x}}{x^2+1} dx = I = \pi \frac{e^{\frac{\pi}{8}i} - e^{\frac{3\pi}{8}i}}{e^{\frac{7\pi}{4}i}} = 2\pi \operatorname{sen} \frac{\pi}{8}$$

(1.0 p.) **6.-** Definir convolución de dos señales de tiempo discreto y usar la definición de transformada z para demostrar el teorema de convolución de la transformada z.