1.- Resolver los problemas de valor inicial siguientes. Señalar el dominio de las soluciones.

(a) $z_x + z_y = z$, $z = \cos t$ con C: $x = t, y = 0, -\infty < t < +\infty$

(b) $x^2 z_x + y^2 z_y = z^2$, $z = 1$ con C: $y = 2x$

(c) $x(y - z)z_x + y(z - x)z_y = z(x - y)$, $z = t$ sobre la curva inicial de ecuaciones

C: $x = t, y = 2t/(t^2 - 1), 0 < t < 1$

(d) $xz_x - yz_y = 2xyz$, $z = t^2$ sobre la curva inicial C: $y = x, x > 0$.

2.- Considerar la ecuación $zz_x + yz_y = x$ y la curva inicial C: $x = t, y = t, t > 0$. Decidir si hay solución única, infinitas soluciones, o no hay solución en un entorno del punto $(1,1)$, para cada uno de los problemas de valor inicial con los siguientes datos inicials:

a) $z = 2t$ sobre C

b) $z = t$ sobre C

c) $z = sen(\frac{\pi}{2}t)$ sobre C.

3.- Para cada una de las funciones siguientes escribir los primeros cinco términos de su desarrollo en serie de Taylor en el punto que se indica x_0, y hallar el mayor intervalo que contiene x_0 en el que la función es analítica:

a) $f(x) = \ln x,\ x_0 = 1.$

b) $f(x) = \dfrac{1}{1 - x^2},\ x_0 = 0.$

c) $f(x) = \cos x,\ x_0 = \frac{\pi}{4}.$

d) $f(x) = \operatorname{sen} 2x,\ x_0 = 0.$

4.- Para cada una de los siguientes problemas de valor inicial, verifica primero que se cumples las hipótesis del teorema de Cauchy-Kovalevsky y encontrar el desarrollo de la función hasta los términos de orden menor o igual a dos:

a) $u_t = u^2 + u_x;\quad u(0, x) = 1 + 2x$

b) $u_t = u_x^2;\quad u(0, x) = 1 + 2x - 3x^2$

c) $u_t = (\operatorname{sen} u)u_x;\quad u(0, x) = \frac{\pi}{6} + x$

d) $u_t = u_x u_y;\quad u(0, x, y) = x + y - 2x^2$

e) $u_t = \cos u_x;\quad u(0, x) = x + \operatorname{sen} x$.

5.- Considérese el problema de valor inicial $u_t = \cos u_x;\quad u(0, x) = \dfrac{\pi}{4}x + \dfrac{\pi}{6}x^2$. Verificar que se cumplen las condiciones del teorema de Cauchy-Kovalevsky y encontrar el desarrollo de la función hasta los términos de orden menor o igual a tres.

6.- Demostrar que el carácter de una E.D.P. permanece invariante bajo cambios de variables.

7.- Comprobar que $u(x,t) = e^{-\lambda\alpha^2 t}\left[A\,\mathrm{sen}(\lambda x) + B\cos(\lambda x)\right]$ verifica al EDP $u_t = \alpha^2 u_{xx}$ para constantes arbitrarias A, B y λ.

8.- Resolver por el método de separación de variables los siguientes problemas de contorno y de valor inicial:
$u_t = \alpha^2 u_{xx}$, para $0 < x < 1$ con condiciones de contorno tipo Dirichlet nulas, y respectiva condición inicial:

a) $u(x,0) = 1$ para $0 \le x \le 1$

b) $u(x,0) = \mathrm{sen}(2\pi x) + \dfrac{1}{3}\mathrm{sen}(4\pi x) + \dfrac{1}{5}\mathrm{sen}(6\pi x)$ para $0 \le x \le 1$

c) $u(x,0) = x - x^2$ para $0 \le x \le 1$

9.- Demuéstrese la unicidad de solución del problema de difusión del calor $u_t = k\,u_{xx}$, $k > 0$, $0 < x < \ell$; $t > 0$, con condiciones de frontera homogéneas : $u(0,t) = 0 = u(\ell,t)$ para $t > 0$ y condición inicial: $u(x,0) = f(x)$; $0 < x < \ell$.
Considérese el funcional de energía: $I(t) = I(t,w) = \dfrac{1}{2}\cdot\int_0^\ell w^2(x,t)\,d\,x$

10.- Resolver el siguiente problema de contorno y de valor inicial:
$u_t = u_{xx}$, para $0 < x < 1$, $0 < t < \infty$, con condiciones de contorno
$u(0,t) = 0$; $u_x(1,t) = 0$; $0 < t < \infty$; y condición inicial $u(x,0) = x$, $0 \le x \le 1$.

11.- Demuéstrese la unicidad de solución del problema de la ecuación de ondas con condiciones de frontera homogéneas:
$c^2 u_{xx} = u_{tt}$, $0 < x < \ell$; $t > 0$ y condiciones iniciales: $u(x,0) = f(x)$; $0 < x < \ell$, y $u_t(x,0) = g(x)$; $0 < x < \ell$. Considérese el funcional de energía:

$$I(t) = I(t,w) = \frac{1}{2}\cdot\int_0^\ell \left(w_x^2 + \frac{1}{c^2}w_t^2\right)d\,x$$

12.- Hallar el límite cuando $t \to \infty$ de la solución del problema:

$$u_t = u_{xx};\quad 0 < x < L,\quad t > 0$$
$$u(x,0) = f(x);\quad 0 \le x \le L$$
$$u_x(0,t) = 0,\quad u_x(L,t) = 0,\quad t \ge 0$$

Interpretar el resultado desde un punto de vista físico

13.- Calcular la distribución de temperatura en una cuerda, si se sabe que ambos extremos están aislados y que la distribución inicial es constante 100º. Deducir cuál será la distribución de temperatura en el futuro, es decir cuando $t \to \infty$.

14.- Resolver la ecuación: $u_{tt} = \alpha^2 u_{xx}$ con condiciones de contorno homogéneas, e iniciales:

$$u(x,0) = f(x) = \begin{cases} x & para \ \ 0 < x < \pi/2 \\ (\pi - x) & para \ \ \pi/2 < x < \pi \end{cases}$$

$$u_t(x,0) = 0$$

15.- Resolver los siguientes problemas con las condiciones que se indican:

(a) $v_{tt} = v_{xx} + 9x(\pi - x)\operatorname{sen} 3t,\ 0 < x < \pi;\ 0 < t$; con las condiciones:

$$v(x,0) = 0;\ v_t(x,0) = 3x \operatorname{sen} 3x;\ 0 < x < \pi$$
$$v(0,t) = 0 = v(\pi,t);\ t > 0$$

(b) $v_{tt} = c^2 v_{xx} + \operatorname{sen} x,\ 0 < x < 1;\ 0 < t$; con $\begin{array}{c} v(x,0) = 0;\ v_t(x,0) = 0;\ 0 < x < 1 \\ v(0,t) = t^2;\ v(1,t) = 0;\ t > 0 \end{array}$

(c) $u_{tt} = c^2 u_{xx} + x(x-1),\ 0 < x < 1;\ 0 < t$; con $\begin{array}{c} u(x,0) = 0;\ u_t(x,0) = 0;\ 0 < x < 1 \\ u(0,t) = t;\ u(1,t) = 0;\ t > 0 \end{array}$

(d) $u_{xx} = \dfrac{1}{c^2} u_t,\ 0 < x < \pi;\ 0 < t$; con $\begin{array}{c} u(x,0) = \operatorname{sen} x;\ 0 < x < 1 \\ u_x(0,t) = 0;\ u_x(\pi,t) = 0;\ t > 0 \end{array}$

16.- La distribución de voltaje en una línea de transmisión satisface la ecuación en derivadas parciales: $V_t(x,t) = kV_{xx}(x,t);$ para $0 < x < 2, \quad 0 < t.$

Determínese, por el método de separación de variables, la función $V(x,t)$, si, además verifica las siguientes condiciones de contorno e iniciales:

$$\begin{array}{ll} V_x(0,t) = 0; & \text{para } 0 < t. \\ V_x(2,t) = 0; & \text{para } 0 < t. \end{array} \qquad V(x,0) = 1 - |x-1|; \quad \text{para } 0 < x < 2.$$

17.- Deduzca la distribución de temperatura $u(x,t)$ en una cuerda de longitud L en la que ambos extremos permanecen aislados (es decir $u_x(0,t) = 0,\ u_x(L,t) = 0$), si la distribución inicial de temperatura viene dada por la función $\phi(x)$ y el coeficiente de difusión es igual a la unidad. ¿Cuál es la distribución estacionaria de temperatura? ¿Por qué?

18.- Deduzca la distribución de temperatura $u(x,t)$ en una cuerda de longitud 1 en la que ambos extremos permanecen a temperatura constante $u(0,t) = 0,\ u(1,t) = 1$, si la distribución inicial de temperatura viene dada por la función $\phi(x)$ y el coeficiente de difusión es igual a la unidad. ¿Cuál es la distribución estacionaria de temperatura?

19.- Resuélvase por el método de separación de variables el siguiente problema: $u_t = u_{xx} - \operatorname{sen} \pi x,\ 0 < x < 1;\ t > 0$, con condiciones de contorno Dirichlet nulas y condición inicial: $u(x,0) = 2 \operatorname{sen} 4\pi x;\ 0 < x < 1$. (examen Feb. 07, ver solución en la web).

20.- Resolver $u_{tt} = u_{xx} + xt;\ 0 < x < \pi,\ 0 < t$, si las autofunciones del problema son: $X_n(x) = \operatorname{sen} nx$ para $n = 1, 2, 3, \ldots$, y las condiciones iniciales son: $u(x,0) = \operatorname{sen} x$, $u_t(x,0) = \operatorname{sen}(3x)$. (examen Feb. 06, ver solución en la web).