EJEMPLOS DE EDP NO HOMOGÉNEAS

1.- Resolver por el método de separación de variables los siguientes problemas de contorno y de valor inicial:
$u_t = \alpha^2 u_{xx} + f(x,t)$, para $0 < x < 1$ con condiciones de contorno tipo Dirichlet nulas, y respectiva condición inicial y función del segundo miembro como se indica:

a) $f(x,t) = x$, $u(x,0) = 1$ para $0 \le x \le 1$

b) $f(x,t) = \operatorname{sen}(2\pi x)$, $u(x,0) = \operatorname{sen}(2\pi x) + \frac{1}{3}\operatorname{sen}(4\pi x)$ para $0 \le x \le 1$

c) $f(x,t) = xt$, $u(x,0) = x - x^2$ para $0 \le x \le 1$

2.- Resolver el problema: $u_t = u_{xx} + \cos(3\pi x)$, $0 < x < 1;\ \ t > 0$, con condiciones de contorno $u_x(0,t) = 0; u_x(1,t) = 0$, $t > 0$, y condición inicial $u(x,0) = 1 + \cos(\pi x)$, para $0 < x < 1$. (examen Dic. 02).

3.- Deducir la distribución de temperatura $u(x,t)$ en una cuerda de longitud *L*, si ésta viene regida por la ecuación no homogénea: $u_t = u_{xx} + xt$, $0 < x < L;\ \ t > 0$, en la que el extremo izquierdo se mantiene a temperatura constante cero, y el otro permanece aislado, si la distribución inicial de temperatura viene dada por la función $\phi(x)$, para $0 < x < L$. (examen Jun. 04).

4.- Resolver por el método de separación de variables el problema: $u_t = u_{xx} + \cos(\pi x)$, $0 < x < 1;\ \ t > 0$, con extremos aislados, y condición inicial $u(x,0) = \cos(2\pi x)$, para $0 < x < 1$. (examen Jun. 05, ver solución en la web).

5.- Resolver $u_t = u_{xx} + x;\ 0 < x < \pi,\ 0 < t$, si las autofunciones del problema son: $X_n(x) = \cos nx$ para $n = 0, 1, 2, 3, \dots$, y la condición inicial es: $u(x,0) = 3 + \cos 2x$. (examen Jun. 06).

6.- Resolver $u_{tt} = u_{xx} + x;\ 0 < x < 1,\ 0 < t$, si las autofunciones del problema son: $X_n(x) = \operatorname{sen} n\pi x$ para $n = 1, 2, 3, \dots$, y las condiciones iniciales son: $u(x,0) = x,\quad u_t(x,0) = 0$. (examen Sep. 06).

7.- Resolver por el método de separación de variables el problema: $u_t = u_{xx} - \cos(\pi x);\ 0 < x < 1,\ 0 < t$, si las autofunciones son: $X_n(x) = \cos n\pi x$ para $n = 0,1,2,3,\ldots$, y la condición inicial: $u(x,0) = 2\cos(4\pi x)$, para $0 < x < 1$. (examen Jun. 07).

8.- Resolver la ecuación: $u_{tt} = \alpha^2 u_{xx} + f(x,t)$ con condiciones de contorno homogéneas, y condiciones iniciales, y función del segundo miembro definidas por:

a) $f(x,t) = x$; $\quad u(x,0) = \begin{cases} x & para\ \ 0 < x < \pi/2 \\ (\pi - x) & para\ \ \pi/2 < x < \pi \end{cases}$, $\quad u_t(x,0) = 0$

b) $f(x,t) = t \operatorname{sen} x$; $\quad u(x,0) = \operatorname{sen} x$, $\quad u_t(x,0) = \operatorname{sen} 3x$

c) $f(x,t) = tx$; $\quad u(x,0) = 0$, $\quad u_t(x,0) = x$

9.- Resolver la ecuación de Poisson en : $u_{xx} + u_{yy} = f(x,y)$ en el rectángulo que se indica con las condiciones de contorno y la función del segundo miembro que se indica:

a) $f(x,y) = xy$; $\quad u(x,0) = x;\ \ u(x,\pi) = 0;\ \ para\ \ 0 < x < \pi$, $\quad u(0,y) = 0;\ \ u(\pi,y) = 0;\ \ para\ \ 0 < y < \pi$

b) $f(x,y) = x \operatorname{sen} y$; $\quad u(x,0) = 0;\ \ u(x,\pi) = x;\ \ para\ \ 0 < x < 1$, $\quad u(0,y) = 0;\ \ u(\pi,y) = 0;\ \ para\ \ 0 < y < \pi$

c) $f(x,y) = y \cos x$; $\quad u(x,0) = x;\ \ u(x,\pi) = 0;\ \ para\ \ 0 < x < 1$, $\quad u_x(0,y) = 0;\ \ u_x(\pi,y) = 0;\ \ para\ \ 0 < y < \pi$