1.- Comprobar que:

(a) la función $f(z)=|z|^2$ es diferenciable en cero pero en ningún otro punto.

(b) $f(z)=|xy|^{1/2}$ satisface las condiciones de Cauchy-Riemann pero no es diferenciable en cero.

(c) si $f(z)$ es una función holomorfa, entonces su parte real y su parte imaginaria son funciones armónicas.

(d) $f(z)=\dfrac{z^5}{|z|^4}$, si $z\neq 0$, con $f(0)=0$ verifica las condiciones de Cauchy-Riemann pero no es diferenciable en cero.

2.- Hallar la función armónica conjugada de $u(x,y)=xy$ y la función de variable compleja asociada. Encontrar la armónica conjugada de $u(x,y)=\exp(x^2-y^2)\cos 2xy$.

3.- Determinar cuáles de los siguientes polinomios son funciones holomorfas (usar las condiciones de Cauchy-Riemann):

(a) $P(z)=P(x+iy)=x^3-3xy^2-x+i(3x^2y-y^3-y)$.

(b) $P(z)=P(x+iy)=x^2+iy^2$.

(c) $P(z)=P(x+iy)=2xy+i(y^2-x^2)$.

4.- Hallar la derivada de los polinomios holomorfos del problema anterior. Comprobar que, en cada caso, $P'(z)=P_x$.

5.- Encontrar el radio de convergencia de las siguientes series de potencias:

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} z^{n!}$;

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} (n+2^n)z^n$;

(c) $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n z^n}{n!}$;

(d) $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$;

(e) $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{2^n z^n}{n!}$;

(f) $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{n!z^n}{n^n}$

(g) $\sum_{n=0}^{\infty} n(z-i)^n$

(h) $\sum_{n=0}^{\infty} n^2(2z-1)^n$

(i) $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n!}(z+1)^n$

6.- Comprobar que $\operatorname{sen} z = z-\dfrac{z^3}{3!}+\dfrac{z^5}{5!}-\dfrac{z^7}{7!}+\cdots$. Usar el desarrollo en serie de potencias centrada en el origen de la función e^z, y la expresión exponencial del seno. Encontrar también la representación de $\cos z$ en serie de potencias centrada en el origen.

7.- Hallar, en cada caso, si es posible, una función holomorfa en todo el plano complejo tal que:

(a) $f(3i)=1$ y $f^{n)}(3i)=(3i)^n$, para $n\geq 1$.

(b) $f(3i)=1$ y $f^{n)}(3i)=n^n$, para $n\geq 1$.

8.- Hallar el desarrollo de Taylor de $f(z)=\dfrac{1}{1+z}$ en todo $z_0 \in C$, en que sea posible.

9.- Sea $f(z)$ una función entera tal que $\left|f^{(n)}(0)\right| \leq 1$ para todo $n \geq 0$. Demostrar que $\left|f(z)\right| \leq e^{|z|}$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

10.- (a) Dar un ejemplo (si es posible, o en caso contrario demostrar que no existe) de una función holomorfa en todo el plano y tal que sus derivadas en el punto $1+i$, sean $f^{(n}(1+i)=2^n$.

(b) Dar razonadamente un ejemplo (o demostrar que no existe) de una función *f* holomorfa en todo el plano complejo y tal que el conjunto $Z(f)=\{z \text{ tal que } f(z)=0\}$ sea vacío.

11.- Dar razonadamente un ejemplo, o explicar por qué no existe, de cada una de las siguiente funciones:

(a) $f \in A(\mathsf{C})$, no constante y tal que $\{z \text{ tal que } f(z)=0\}=\varnothing$.

(b) $f \in \mathcal{H}$(☝), no constante y tal que $\{z \text{ tal que } f(z)=0\}$ sea no acotado.

(c) $f \in \mathcal{H}$(☝), no constante y tal que $\{z \text{ tal que } f(z)=0\}$ sea una elipse.

12.- Determinar, en cada caso, el mayor conjunto donde la función es holomorfa y clasificar razonadamente sus singularidades:

(a) $f(z)=(z+3)e^{\frac{1}{z+3}}$, (b) $f(z)=\dfrac{e^{iz}}{z^5+z}$.

(c) $f(z)=\dfrac{1}{z-1}e^{\frac{1}{z+1}}$. (d) $f(z)=z^3\cos\left(\dfrac{1}{z}\right)+\dfrac{\operatorname{sen} z}{z}$.

13.- Demuéstrese que la función $f(z)=e^{1/z}=\sum_{n\geq 0}\dfrac{1}{n!}\dfrac{1}{z^n}$ es holomorfa en el plano excepto en el origen y admite el origen como singularidad esencial. Esta función no toma jamás el valor cero. Demuéstrese que toma todo valor distinto de cero en todo disco perforado $0<|z|<\varepsilon$.

14.- Obténganse los desarrollos de Laurent de $f(z)=\dfrac{7z-2}{z(z+1)(z+2)}$, en $z=-1$, en cada una de las coronas circulares de centro $z=-1$, en las que *f* es holomorfa.

15.- Determínese el desarrollo de Laurent de cada una de las funciones siguientes en el dominio de convergencia que se indica:

(a) $f(z)=e^z+e^{\frac{1}{z^2}}$ en $|z|>0$, (b) $g(z)=\dfrac{1}{z(z+R)}$ en $0<|z|<R$.

16.- Hallar el desarrollo de Laurent de $f(z)=\dfrac{z}{(z-1)^2}$ relativo al punto $z=0$ en el conjunto definido $|z|<1$. Hallar también el desarrollo de Laurent en el conjunto definido por $|z|>1$.

17.- (a) Determinar la serie de Laurent de la función $f(z)=\dfrac{1}{z^2+1}$ alrededor de $z=1$, en la región de convergencia que contiene al origen.

(b) Dar un ejemplo de una función $f\in\mathscr{H}\left(\mathbb{C}-\{i\}\right)$ que tenga una singularidad esencial en $z=i$ con residuo $\operatorname{Res}(f,i)=\pi$.

18.- Hallar la región de convergencia de la serie de Laurent

$\dfrac{1}{2z^2}-\dfrac{1}{z}+2-4z+8z^2-16z^3+\ldots$ y encontrar la función holomorfa a la que converge.

19.- Sea la función de variable compleja $f(z)$ tal que la función $g(z)=\left(z^3+1\right)f(z)$ es holomorfa en todo el plano complejo $\mathbb{C}$.¿Cuánto vale $f(i)$ si $g(z)$ está acotada en $\mathbb{C}$ y $\lim_{z\to-1}\left(z^3+1\right)f(z)=1$?

20.- Hallar las integrales siguientes :

(a) $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{dt}{a+\operatorname{sen}^2 t}=\frac{\pi}{2\sqrt{a^2+a}}\,,\ a>0$

(b) $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{dt}{\left(a+\operatorname{sen}^2 t\right)^2}=\frac{\pi(2a+1)}{4\sqrt{\left(a^2+a\right)^3}}\,,\ a>0$

(c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)\left(x^2+b^2\right)}=\frac{\pi}{ab(a+b)}\,,\ a,b>0$

(d) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^3\operatorname{sen}ax\,dx}{\left(x^2+b^2\right)^2}=\frac{\pi}{2}(2-ab)e^{-ab}\,,a,b>0$

(e) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{x^a\,dx}{(x+b)^2}=\frac{\pi a b^{a-1}}{\operatorname{sen}(\pi a)}\,,\ 1>a>-1,b>0$

(f) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{x^a\,dx}{x^2+b^2}=\frac{\pi b^{a-1}}{2\cos\pi a/2}\,,\ 1>a>-1,b>0$

21.- Calcular $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ax}}{1+e^x}dx$ si $0<a<1$, utilizando la integración a lo largo del rectángulo de vértices: $(\mathrm{R},0)$, $(\mathrm{R},2\pi i)$, $(-\mathrm{R},2\pi i)$, $(-\mathrm{R},0)$.

22.- Evalúese $\displaystyle\int_{|z|=1}|z+1|\,|dz|$. (Demostrar primero que $\left|1+e^{it}\right|=\sqrt{2(1+\cos t)}$)

(*) 23.- Obténgase la fórmula de *Wallis*: $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\cos^{2n}\theta\,d\theta=\frac{(2n)!}{\left(2^n\cdot n!\right)^2}\cdot\frac{\pi}{2}$

(Indicación: Integrar $f(z)=\dfrac{\left(z+\frac{1}{z}\right)^{2n}}{z}$ sobre $|z|=1$).

24.- Calcular: $\displaystyle\oint_C\frac{e^{z^2}}{z-1}dz$, donde C es el rectángulo limitado por $x=0$, $x=3$, $y=-1$, e $y=1$. Utilizar este resultado para calcular dos integrales reales.

25.- Calcular $\displaystyle\int_{|z|=1}\frac{e^{kz^n}}{z}dz$, con n entero positivo. Después, muéstrese que $\displaystyle\int_0^{2\pi}e^{k\cos n\theta}\cdot\cos(k\operatorname{sen}n\theta)\,d\theta=2\pi$.

(*) 26.- El polinomio de Legendre $P_n(z)$ se define como $P_n(z)=\dfrac{1}{2^n\cdot n!}\dfrac{d^n}{dz^n}\left[\left(z^2-1\right)^n\right]$
Muéstrese mediante la fórmula de Cauchy para las derivadas, que:
$P_n(z)=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int\dfrac{\left(\xi^2-1\right)^n d\xi}{2^n\left(\xi-z\right)^{n+1}}$, donde z está en el interior de la curva de Jordan γ suave por partes.

27.- Aplicar la integración en el plano complejo para hallar:

(a) $\displaystyle\int_{|z|=2\pi}\frac{e^z}{\left(z-\pi i\right)^n}dz,$ con $n\geq 1,$ (b) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{x\operatorname{sen}x}{x^2+1}dx$ (c) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{dx}{x^2+9}.$

(d) $\displaystyle\int_{|z-i|=2}\frac{(z+1)\cos z}{z^3}dz$ (e) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dx}{\left(x^2+1\right)\left(x^2+4\right)}$ (f) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\sqrt[4]{x}}{x^2+1}dx$

(g) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dx}{\left(x^2+1\right)\sqrt{x}}$ (h) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{1}{2+\cos x}dx$

(i) $\displaystyle\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}\bar{z}z^{\ell}\bar{z}^k\,dz,$ según los valores de ℓ y k, (j) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{dx}{\left(x^2+4\right)^2}.$

(k) $\displaystyle\oint_{|z|=1}\frac{\operatorname{sen}z\,dz}{\left(z-\frac{i}{2}\right)^3}$; (l) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{x^{1/2}}{1+x^2}$ (m) $\displaystyle\int_{|z|=1}\frac{z^2}{\cos^2 z\operatorname{sen}^2 z}dz$

(n) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{x^a\,dx}{x^3+1},$ donde $1>a>-1$ $(a\neq 0)$

(o) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x-b)\left(x^2+a^2\right)}$ siendo b > 0, $a\neq 0,$ $a\in R.$

(p) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\cos 3t\,dt}{1-2a\cos t+a^2}$ siendo $0<a<1.$ (q) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{2x^2-1}{x^4+5x^2+4}dx$

(r) $\displaystyle\int_{|z-1|=1}\frac{\operatorname{sen}\pi z}{(z^2-1)^2}dz$ (s) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\cos 2t}{1-2a\cos t+a^2}dt$

28- Dar la fórmula de Cauchy para las derivadas. Aplicar dicha fórmula para calcular las integrales siguiente, siendo k un número entero.

$$\oint_{|z|=1}\frac{e^{iz}}{z^{k+1}}dz,\ \text{con } k\in N\ ;\qquad \int_{|z|=4}\frac{e^z}{\left(z-\pi i\right)^n}dz,\ \text{con}\ n\geq 1,$$

29- Enunciar el teorema de los residuos. Calcular la integral siguiente, donde el camino de integración es la circunferencia unidad $\gamma\equiv|z|<1$:

$$\oint_{\gamma}\frac{\operatorname{sen}z-z}{z^6}dz$$