1.- Determiar la transformada de Laplace, la región de convergencia y la gráfica de los ceros y los polos:

(a) $x(t) = e^{-at}u(t),\ \ a > 0$

(b) $x(t) = -e^{at}u(-t),\ \ a > 0$

(c) $x(t) = e^{at}u(t),\ \ a > 0$

(d) $x(t) = e^{-a|t|},\ \ a > 0$

(e) $x(t) = u(t)$

(f) $x(t) = \delta(t - t_0)$

2.- La transformada de Laplace se dice que existe para un número complejo s si la magnitud de su transformada es finita, es decir si $|X(s)| < \infty$. Comprobar que una condición suficiente para la existencia de la transformada $X(s)$ en $s = s_0 = \sigma_0 + j\omega_0$ es $\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| e^{-\sigma_0 t} < \infty$.

3.- Determinar la función $x(t)$ para la transformada de Laplace $X(s)$ y la región de convergencia asociada en cada uno de los casos siguientes:

(a) $X(s) = \dfrac{1}{s+1},\ \ \mathrm{Re}(s) > -1$

(b) $X(s) = \dfrac{1}{s+1},\ \ \mathrm{Re}(s) < -1$

(c) $X(s) = \dfrac{s}{s^2+4},\ \ \mathrm{Re}(s) > 0$

(d) $X(s) = \dfrac{s+1}{s^2+5s+6},\ \ \mathrm{Re}(s) < -3$

(e) $X(s) = \dfrac{s+1}{(s+1)^2+4},\ \ \mathrm{Re}(s) > -1$

4.- Como aplicación de la transformada de Laplace, hállese la solución de los problemas de valor inicial siguientes:

(a) $x''(t) + 4x(t) = 0,\ \ \text{con}\ \ x(0) = 5;\ \ x'(0) = 0$

(b) $x''(t) + x(t) = \cos 3t,\ \ \text{con}\ \ x(0) = 1;\ \ x'(0) = 0$

(c) $x''(t) + 3x'(t) + 2x(t) = t,\ \ \text{con}\ \ x(0) = 0;\ \ x'(0) = 2$

(d) $x''(t) + 4x'(t) + 3x(t) = 1,\ \ \text{con}\ \ x(0) = 0;\ \ x'(0) = 0$

(e) $x^{(4)}(t) + 2x''(t) + x(t) = 4t\,e^t,\ \ \text{con}\ \ x(0) = x'(0) = x''(0) = x'''(0) = 0$

5.- (a) Probar que si $x(t)$ es una función par, su transformada de Laplace $X(s)$ también es par.
(b) Si $x(t)$ es una función impar, su transformada de Laplace $X(s)$ también es impar.

6.- Hallar la transformada de Laplace de la función impulso unitario $\delta(t)$ utilizando que $\delta(t) = \dfrac{du(t)}{dt}$.

7.- Calcular la transformada de Laplace de la función $x(t) = \int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau$ si la transformada de Laplace de $f(t)$ es $F(s)$.

8.- Hallar la relación entre la transformada de Laplace de una función causal $x(t)$ y su transformada de Fourier.

9.- Utilizar el resultado del problema anterior para calcular la transformada de Fourier de la función: $f(t)=\begin{cases} e^{-at} & si \quad t>0 \\ 0 & si \quad t<0 \end{cases}$ con $a>0$

10.- Seguir un desarrollo análogo al utilizado en el caso de la transformada de Fourier para demostrar las propiedades de la transformada de Laplace:

(a) Linealidad de la transformada.
(b) Desplazamiento en el tiempo.
(c) Deplazamiento en el domino *s*.
(d) Escalamiento en el tiempo.
(e) Propiedad de convolución.
(f) Diferenciación en el tiempo.
(g) Diferenciación en el dominio *s*.

11.- Determiar la transformada z, la región de convergencia y la gráfica de los ceros y los polos de cada una de las sucesiones siguientes:

(a) $\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$

(b) $-\left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1]$

(c) $\left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n]$

(d) $\delta[n]$

(e) $\delta[n-1]$

(f) $\delta[n+1]$

(g) $\left(\frac{1}{2}\right)^n (u[n]-u[n-10])$

12.- Determinar la transformada z de la sucesión:

$$x[n]=\begin{cases} n, & 0\le n\le N-1 \\ N, & N\le n \end{cases}$$

13.- Determinar la transformada z de cada una de las sucesiones siguientes. Expresar las sumas en forma compacta, indicar la región de convergencia asociada y hacer una gráfica de los ceros y polos.

(a) $\left(\frac{1}{2}\right)^{|n|}$

(b) $7\left(\frac{1}{3}\right)^n \cos\left[\frac{2\pi n}{6}+\frac{\pi}{4}\right]u[n]$

(c) $x[n]=\begin{cases} 1, & 0\le n\le 9 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$

14.- Hallar la sucesión asociada a cada una de las transformadas z siguientes, usando el método que se indica:

(a) $X(z)=\dfrac{1-2z^{-1}}{1-\frac{5}{2}z^{-1}+z^{-2}}$, con $x[n]$ absolutamente sumable; por fracciones parciales.

(b) $X(z)=\dfrac{3}{z-\frac{1}{4}-\frac{1}{8}z^{-1}}$, con $x[n]$ absolutamente sumable; por fracciones parciales.

(c) $X(z)=\dfrac{1-\frac{1}{2}z^{-1}}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}$, con $x[n]$ absolutamente sumable; por división.

(d) $X(z)=\dfrac{1}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}$, $|z|>\frac{1}{2}$, por serie de Taylor y por fracciones parciales.

(e) $X(z)=\dfrac{1}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}$, $|z|<\frac{1}{2}$, por serie de Taylor y por fracciones parciales.

(f) $X(z)=\dfrac{1-\frac{1}{2}z^{-1}}{1-\frac{1}{4}z^{-2}}$, $|z|>\frac{1}{2}$, por serie de Taylor y por fracciones parciales.

15.- Mediante la definición de la transformada z demostrar que si $X(z)$ es la transformada z de $x[n]$, entonces:

(a) $x^*[n]\xleftrightarrow{z} X^*(z^*)$

(b) $x[-n]\xleftrightarrow{z} X(1/z)$

(c) $Re\{x[n]\}\xleftrightarrow{z}\frac{1}{2}\left[X(z)+X^*(z^*)\right]$

(d) $Im\{x[n]\}\xleftrightarrow{z}\frac{1}{2j}\left[X(z)-X^*(z^*)\right]$

16.- Sea $x[n]$ una sucesión de números reales con transformada z una función racional $X(z)$. Demostrar que entonces:

(a) $X(z)=X^*(z^*)$

(b) Deducir del apartado anterior que si hay un polo (o cero) en $z=z_0$, entonces hay un polo (o cero) en $z=z_0^*$.

(c) Comprobar el resultado de la parte (b) en las sucesiones:

(a) $x[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$ (b) $x[n]=-\left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1]$

17.- Sea $x[n]$ una sucesión de números reales tal que todos los polos y ceros de su transfor-mada Z están dentro del círculo unidad. Hallar en función de los términos de $x[n]$ otra sucesión real $x_1[n]$ distinta de $x[n]$, tal que $x_1[0]=x[0]$, $|x_1[n]|=|x[n]|$ y cuya transformada *z* tenga todos sus polos y ceros dentro del círculo unidad .

18.- Usar la transformada Z para resolver el siguiente sistema de ecuaciones (ecuaciones en diferencias):

$$\left.\begin{array}{r} t[n]=at[n-1] \\ f[n]=bf[n-1]+ct[n-1] \end{array}\right\}$$

, donde las sucesiones son causales (una sucesión $x[n]$ es causal si $x[n]=0$, para $n<0$) con condiciones iniciales $t[0]=t_0$ y $f[0]=f_0$.

19.- Definir transformada Z de una señal de tiempo discreto, y transformada de Fourier de una señal de tiempo discreto. Demostrar que la transformada de Fourier de una señal de tiempo discreto $x[n]$ converge absolutamente si y sólo si la Región de Convergencia de la transformada Z de $x[n]$ contiene al círculo unidad.

20.- Calcular la transformada Z de la señal de tiempo discreto

$$x[n] = \begin{cases} 2^{-n} & \text{si } 0 \le n \le N \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Dar la región de convergencia y hallar los ceros y los polos de la transformada.

21.- Definir transformada Z de una señal de tiempo discreto. Hallar $x[0]$ si la transformada z de la sucesión $x[n]$ es

$$X(z) = \frac{\frac{1}{4}}{1-2z^{-1}} - \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$$

y su región de convergencia contiene a la circunferencia unidad.

22.- Calcular la transformada Z de la señal de tiempo discreto

$$x[n] = \begin{cases} 2^{-n} & \text{si } 0 \le n \le N \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Dar la región de convergencia y hallar los ceros y los polos de la transformada.

23.- Definir convolución de dos señales de tiempo discreto y usar la definición de transformada Z para demostrar el teorema de convolución de la transformada Z.