ECUACIÓN LINEAL HOMOGENEA DE SEGUNDO ORDEN CON COEFICIENTES CONSTANTES

1.- ECUACIÓN CARACTERÍSTICA.

Sea la ecuación diferencial lineal homogénea de 2º orden : $y'' + p\,y' + q\,y = 0$ con p, q constantes, o mejor $\boxed{a_0\, y'' + a_1 y' + a_2 y = 0}$ ***(1)*** con $a_0 \neq 0$, a_1, a_2 constantes reales.

El teorema de existencia y unicidad de solución garantiza que todo problema de valor inicial tiene solución única, válida en $(-\infty, +\infty)$.

Se trata de encontrar un método para hallar dos soluciones linealmente independientes, para formar la solución general. Parece lógico buscar como soluciones de (1) funciones $f(x)$ cuya derivada sea del mismo tipo que $f(x)$, salvo factor constante.

Por ello se ensayan soluciones de la forma: $y = e^{rx}$ **.** Sustituyendo en (1), se obtiene :
$a_0 r^2 e^{rx} + a_1 r\, e^{rx} + a_2 e^{rx} \equiv 0$ en $\Re$, y como e^{rx} no es nunca nulo resulta :

$$\boxed{a_0 r^2 + a_1 r + a_2 = 0} \quad \textbf{(2)}$$

Se ha visto por tanto que $y = e^{rx}$ es solución de (1), si y solo si r satisface a la ecuación algebraica (2), que se denomina ***ecuación característica*** de la ecuación diferencial (1).

El polinomio $P(r) = a_0 r^2 + a_1 r + a_2$ se llama el ***polinomio característico*** de (1).

2.-OBTENCION DE UN CONJUNTO FUNDAMENTAL EN LOS DISTINTOS CASOS.

La ecuación característica (2) es de 2º grado. Por tanto, sus raíces pueden ser: dos reales y distintas, una real con multiplicidad dos, o dos raíces complejas conjugadas.

2.1- CASO DE DOS RAÍCES REALES DISTINTAS

"Si la ecuación característica (2) tiene dos raíces reales y distintas r_1 y r_2, entonces $\left\{y_1 = e^{r_1 x}\ ,\ y_2 = e^{r_2 x}\right\}$ es un conjunto fundamental de soluciones de (1). Por tanto, la solución general de (1), válida en $(-\infty, +\infty)$, es: $y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$ donde C_1 y C_2 son constantes arbitrarias".

En efecto, y_1 e y_2 son linealmente independientes.
Su wronskiano es: $W[y_1(x), y_2(x)] = \begin{vmatrix} e^{r_1 x} & e^{r_2 x} \\ r_1 e^{r_1 x} & r_2 e^{r_2 x} \end{vmatrix} = (r_2 - r_1)\ e^{(r_1 + r_2)\,x} \neq 0 \quad \forall x \in \Re.$

Ejemplo 1: ***Solución general de la ecuación diferencial: $y'' + 2y' - 3y = 0$***

La ecuación característica es : $r^2 + 2r - 3 = 0$. Es decir $(r-1)(r+3) = 0$, cuyas raíces son $r_1 = 1$, $r_2 = -3$.
Luego $\{e^x, e^{-3x}\}$ es un conjunto fundamental de soluciones.

Y la solución general será: $\boxed{\mathbf{y = C_1 e^x + C_2 e^{-3x}}}$.

2.2.- CASO DE UNA RAIZ DOBLE

"Si la ecuación característica (2) tiene una raíz doble $r = r_1$, entonces un conjunto fundamental de soluciones de (1) es $\left\{y_1 = e^{r_1 x},\ y_2 = xe^{r_1 x}\right\}$ Por tanto, la solución general de (1) valida en todo $\Re$ es :
$y = e^{r_1 x}\,[\,C_1 + C_2 x\,]$ con C_1 y C_2 constantes arbitrarias".

En efecto, la solución es $y_1 = e^{r_1 x}$. Para hallar la segunda solución, puede usarse el método de reducción de orden, a partir del cambio de variable dependiente $y = e^{r_1 x} u(x)$:

$y = e^{r_1 x} u$, $y' = e^{r_1 x}[r_1 u + u']$, $y'' = e^{r_1 x}[r_1^2 u + 2r_1 u' + u'']$

Sustituyendo en la ecuación (1):
$e^{r_1 x}[a_o u'' + (2r_1 a_o + a_1) u' + (a_o r_1^2 + a_1 r_1 + a_2) u] = 0$ (*)

Por ser r_1 raíz de la ecuación característica, es $a_0 r_1^2 + a_1 r_1 + a_2 = 0$. Y por ser r_1 raíz doble, es $r_1 = -\dfrac{a_1}{2a_0}$. Luego $2r_1 a_0 + a_1 = 0$. Por tanto, la ecuación (*) toma la forma: $u'' = 0$.

Una solución particular de ésta es $u_1 = x$. luego es solución particular de la (1) la función $y_2 = x e^{r_1 x}$.

Esta solución es linealmente independiente de la primera, pues $\dfrac{y_2}{y_1} = x \neq cte$ o bien:

$$W[y_1, y_2] = \begin{vmatrix} e^{r_1 x} & x e^{r_1 x} \\ r_1 e^{r_1 x} & (r_1 x + 1) e^{r_1 x} \end{vmatrix} = e^{2r_1 x} \neq 0 \quad \forall x \in \Re$$

Por tanto $\{y_1 = e^{r_1 x},\ y_2 = x e^{r_1 x}\}$ es un conjunto fundamental de soluciones.

<u>Nota</u>: Puede también comprobarse directamente que $y_2 = x e^{r_1 x}$ es solución, de la forma siguiente:

Si r_1 es raíz doble de (2), resulta: $P(r) = a_0 r^2 + a_1 r + a_2 = a_0(r-r_1)^2$, $P'(r) = 2a_0(r-r_1)$.

Luego: $P(r_1) = P'(r_1) = 0$. Se verifica:

$L[e^{rx}] = e^{rx}[a_0 r^2 + a_1 r + a_2] = e^{rx} P(r)$.   Luego: $L[e^{r_1 x}] = 0$.

$L[xe^{rx}] = L[\frac{d}{dr} e^{rx}] = \frac{d}{dr} L\left[e^{rx}\right] = \frac{d}{dr}\left[e^{rx} P(r)\right] = e^{rx}\left[x P(r) + P'(r)\right]$.

Luego: $L[x\, e^{r_1 x}] = e^{r_1 x}[xP(r_1) + P'(r_1)] = 0$.

Por tanto: $y_2 = x e^{r_1 x}$ es solución de (1).

<u>Ejemplo 2</u>: ***Solución general de la ecuación diferencial $y'' - 6y' + 9y = 0$.***

La ecuación característica $r^2 - 6r + 9 = 0$, es decir $(r-3)^2 = 0$, tiene raíz doble $r_1 = 3$.

Luego $\{e^{3x}, xe^{3x}\}$ es un conjunto fundamental de soluciones.

Por tanto la solución general es: $\boxed{\mathbf{y = e^{3x} [C_1 + C_2 x]}}$

2.3.- CASO DE RAICES COMPLEJAS

<u>Observación</u>: ***$e^{(x+iy)} = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \operatorname{sen} y)$ (Fórmula de Euler)***

Se verifica:

"Si la ecuación característica tiene raíces complejas, y estas son conjugadas $\alpha \pm \beta i$. Entonces un conjunto fundamental de soluciones de (1), en todo $\Re$ es :

$$\{y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x,\ y_2 = e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x\}.$$

Por tanto la solución general de (1) es : $y = e^{\alpha x}[C_1 \cos \beta x + C_2 \operatorname{sen} \beta x]$,

siendo C_1 y C_2 constantes arbitrarias reales".

En efecto, lo dicho en el caso de dos raíces reales y distintas de la ecuación (2), es también válido si las raíces r_1 y r_2 son complejas conjugadas: $r_1 = \alpha + \beta i$, $r_2 = \alpha - i\beta$.

Son soluciones linealmente independientes en el campo complejo, las funciones

$$y_1^* = e^{(\alpha + i\beta)x} \quad \text{e} \quad y_2^* = e^{(\alpha - i\beta)x},$$

según puede comprobarse inmediatamente sustituyendo en la ecuación diferencial (1) y teniendo en cuenta que según se establece en el estudio de las funciones complejas, la derivada de e^{rx} con r complejo, es también re^{rx}.

Según la definición de exponenciales complejas es: $y_1^* = e^{\alpha x} (\cos\beta x + i \operatorname{sen} \beta x)$.

Por tanto son soluciones reales de (1), las partes real e imaginaria de esta solución compleja, es decir:

$$y_1 = e^{\alpha x} \cos\beta x \qquad y_2 = e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x.$$

Además son linealmente independientes, pues $\frac{y_2}{y_1} = tg\beta x \neq 0$ o bien:

$$W[y_1, y_2] = \begin{vmatrix} e^{\alpha x}\cos\beta x & e^{\alpha x} sen\beta x \\ e^{\alpha x}[\alpha\cos\beta x - \beta sen\beta x] & [\alpha sen\beta x + \beta\cos\beta x]\, e^{\alpha x} \end{vmatrix} = \beta\, e^{2\alpha x} \neq 0 \quad \forall x \in \Re$$

Por tanto $\{y_1, y_2\}$ es conjunto fundamental c.q.d.

Ejemplo 3: ***Solución general de la ecuación diferencial: $y'' + 2y' + 17y = 0$***

Ecuación característica: $r^2 + 2r + 17 = 0$. Raíces: $r_1 = -1 + 4i$ $\quad r_2 = -1 - 4i$

Luego son soluciones linealmente independientes: $y_1 = e^{-x} \cos 4x$ $\quad y_2 = e^{-x} \operatorname{sen}4x$

Solución general: $\boxed{\mathbf{y = e^{-x} [C_1 \cos 4x + C_2 \operatorname{sen} 4x].}}$ $\quad \mathbf{C_1, C_2 \in \Re.}$

Ejemplo 4: ***Solución general de la ecuación diferencial: $y'' + y' + y = 0$***

Ecuación característica: $r^2 + r + 1 = 0$. Luego $r = \frac{-1 \pm \sqrt{3}\,i}{2}$.

Sistema fundamental de soluciones: $\left\{ y_1 = e^{-\frac{x}{2}} \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x \quad y_2 = e^{-\frac{x}{2}} \operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}x \right\}$

Solución general: $\boxed{\mathbf{y = e^{-\frac{x}{2}}\left[C_1 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2 \operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}x\right]}}$

Ejemplo 5: ***Solución de $y'' + 9y = 0$ tal que*** $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1,\; y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3$.

Ecuación característica: $r^2 + 9 = 0$. Raíces: $r_1 = 3i$ $\quad r_2 = -3i$.

Sistema fundamental de soluciones: $\{y_1 = \cos 3x \quad y_2 = \operatorname{sen}3x\}$.

Solución general: $\underline{y = C_1 \cos 3x + C_2 \operatorname{sen} 3x\}.}$

Condiciones $\begin{cases} y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \Rightarrow\; 1 = 0 \cdot C_1 - C_2 \\ y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3 \Rightarrow 3 = 3C_1 + 0 \cdot C_2 \end{cases}$. Luego: $C_1 = 1$ y $C_2 = -1$.

Solución del problema de valor inicial dado: $\boxed{\mathbf{y = \cos 3x - \operatorname{sen} 3x.}}$