ECUACIÓN LINEAL COMPLETA DE 2º ORDEN

Se ha estudiado ya la ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden:

$$\boxed{\mathbf{y'' + p(x)y' + q(x)y = 0}} \qquad [1]$$

siendo p(x) y q(x) continuas en un intervalo I.

Se trata ahora de considerar la ***ecuación lineal completa o no homogénea de 2º orden:***

$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = g(x)$. O mejor en forma canónica:

$$\boxed{\mathbf{y'' + p(x)y' + q(x)y = h(x)}} \qquad [2] \qquad \text{ó} \qquad \boxed{\mathbf{L[y] = h(x)}}$$

con ***p(x), q(x) y h(x) continuas en un intervalo I.***

1. ESTRUCTURA DEL CONJUNTO DE SOLUCIONES.

Teorema 1. (Principio de superposición)

Si las funciones $y_i(x)$ i= 1, 2, ... , m, son soluciones particulares en I, respectivamente de L[y] = $h_i(x)$, entonces la función $k_1 y_1(x) + ... + k_m y_m(x)$ lo es de L[y] = $k_1 h_1(x) + ... + k_m h_m(x)$

En efecto: Basta aplicar la linealidad del operador L:

$L[k_1 y_1(x) + ... + k_m y_m(x)] = k_1 L[y_1] + ... + k_m L[y_m] = k_1 h_1(x) + ... + k_m h_m(x)$

Corolario.

La diferencia de dos soluciones particulares $y_1(x)$, $y_2(x)$ de la ecuación completa L[y] = h(x) [2], es solución de la correspondiente homogénea L[y] = 0 [1]

Pues $L[y_2 - y_1] = L[y_2] - L[y_1] = h(x) - h(x) = 0$

Ejemplo 1: Puesto que $y_1(x) = x-1$ es una solución particular de $y'' + 2y' - 3y = 5 - 3x$ en I = $\Re$, e $y_2(x) = e^{2x}$ lo es de $y'' + 2y' - 3y = 5e^{2x}$,una solución de $y'' + 2y' - 3y = 10 - 6x + e^{2x}$ será la $y_3(x) = 2(x-1) + \dfrac{e^{2x}}{5}$

__Ejemplo 2:__ ***Sea la ecuación:*** $L[y]=h_1(x)+ih_2(x)$ ***, en la que los coeficientes p(x), q(x) y las funciones*** $h_1(x)$ ***y*** $h_2(x)$ ***son reales y continuas en I.***
Si tiene la solución compleja $y=y_1(x)+iy_2(x)$ ***, entonces la parte real*** $y_1(x)$ ***y la parte imaginaria*** $y_2(x)$ ***, son soluciones de las ecuaciones:*** $L[y]=h_1(x)$ ***y*** $L[y]=h_2(x)$ ***respectivamente.***

En efecto:
Es $\mathrm{h}_1(x)+\mathrm{i}\,\mathrm{h}_2(x)=\mathrm{L}[y_1(x)+\mathrm{i}\,y_2(x)]=\mathrm{L}[y_1]+\mathrm{i}\,\mathrm{L}[y_2]$
Por tanto: $\mathrm{L}[y_1]=\mathrm{h}_1(x)$ y $\mathrm{L}[y_2]=\mathrm{h}_2(x)$

__Teorema 2.__

Si $y_p(x)$ ***es una solución particular en I de la ecuación completa [2] , e*** $y_1(x)$ ***,*** $y_2(x)$ ***son dos soluciones de la correspondiente ecuación homogénea [1] , linealmente independientes en I , entonces la solución general de la completa es:***
$y(x) = c_1\, y_1(x) + c_2\, y_2(x) + y_p$ ***con*** c_1 ***y*** c_2 ***constantes arbitrarias.***

- Cualesquiera que sean c_1 y c_2 , la $c_1 y_1 + c_2 y_2 + y_p$ es solución de [2]
En efecto:
$$\mathrm{L}[\mathrm{c}_1 y_1+\mathrm{c}_2 y_2+y_\mathrm{p}]=\mathrm{c}_1\mathrm{L}[y_1]+\mathrm{c}_2\mathrm{L}[y_2]+\mathrm{L}[y_\mathrm{p}]=\mathrm{L}[y_\mathrm{p}]=\mathrm{h}(x)$$

- Recíprocamente: Toda solución de [2] puede expresarse en la forma $c_1 y_1 + c_2 y_2 + y_p$ para unos valores concretos de c_1 y c_2.
En efecto:
Sea $y=\varphi(x)$ una solución de [2]. Entonces $\varphi(x)-y_\mathrm{p}$ es solución de la homogénea [1]. Luego puede escribirse como una combinación lineal concreta de los elementos del sistema fundamental $\{y_1(x),y_2(x)\}$:
$\varphi(x)-y_\mathrm{p}=\mathrm{c}_1 y_1+\mathrm{c}_2 y_2$. Por tanto $\varphi(x)=\mathrm{c}_1 y_1+\mathrm{c}_2 y_2+y_\mathrm{p}$

__Ejemplo 3__: ***Hallar la solución general de la ecuación diferencial:***
$y''+4y=4x$

La solución general de la correspondiente homogénea $y''+4y=0$ es la $y=\mathrm{c}_1\cos 2x+\mathrm{c}_2\,\mathrm{sen}\ 2x$
Evidentemente es solución particular de la completa la $y_\mathrm{p}=x$.
Luego la solución general de la ecuación dada es:

$$\boxed{\mathbf{y = c_1 \cos 2x + c_2 sen\ 2x + x}}$$

Ejemplo 4: ***a) Comprobar que y_p = tg x es una solución particular de la ecuación diferencial*** $y'' - 2y = 2\,tg^3\, x$ **.**

b) Hallar la solución general de: $y'' - 2y = 2\,tg^3\, x - 2x$

a) $y_p = \operatorname{tg} x$ $\quad y_p' = 1 + tg^2 x$ $\quad y_p'' = 2\operatorname{tg} x(1 + \operatorname{tg}^2 x)$

Luego $y_p'' - 2y_p = 2\operatorname{tg} x + 2\operatorname{tg}^3 x - 2\operatorname{tg} x = 2\operatorname{tg}^3 x \quad \Rightarrow \quad y_p$ es solución.

b) Una solución particular de $y'' - 2y = -2x$ es evidentemente $y = x$.

Luego una solución particular de $y'' - 2y = 2\ \operatorname{tg}^3 x - 2x$ es $\operatorname{tg} x + x$.

La solución general de $y'' - 2y = 0$ es $y_h = c_1 e^{\sqrt{2}x} + c_2\, e^{-\sqrt{2}x}$

Luego la solución general buscada es:

$$\boxed{\mathbf{y(x) = c_1 e^{\sqrt{2}\,x} + c_2\, e^{-\sqrt{2}\,x} + tg\, x + x}}$$