VARIABLE COMPLEJA IV – DESARROLLO EN SERIE DE LAURENT DE UNA FUNCIÓN HOLOMORFA EN UNA CORONA.

Definición: Sea f una función definida en una corona : $r<|z-a|<R$. Se dice que f es desarrollable en s. de L. en esa corona si existe una s. de L. $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-a)^n$, que converge a $f(z)$ para todo punto en la corona. En ese caso, además la función f es holomorfa en la corona y la convergencia de la serie es absoluta y uniforme en cualquier compacto contenido en la corona.
Además si existe una s. de L., ésta es única, y se tiene la siguiente fórmula para los coeficientes de las serie:

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(\omega)}{(\omega-a)^{n+1}}\,d\omega \text{ siendo } \gamma:|z-a|=\rho \text{ y } r<\rho<R.$$

EJEMPLO (Problema 16): El d. de Laurent de la función $f(z)=z\cdot e^{1/z^2}$ alrededor de $z=0$ es:

$e^z=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}z^n \Rightarrow e^{1/z^2}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\cdot\frac{1}{z^{2n}} \Rightarrow z\cdot e^{1/z^2}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\cdot\frac{1}{z^{2n-1}}$, convergente para $|z|>0$.

Además $Res(f,0)=1$, luego la integral pedida en el apartado c) vale $2\pi i$.

Definición: Sea f una función holomorfa en: $|z|>r$. Se dice que f tiene un polo en el punto del infinito si la función obtenida al hacer el cambio de variable $z=1/z'$ en la expresión $f(z)dz=-\frac{1}{z'^2}\cdot f\left(\frac{1}{z'}\right)dz'$, es decir $g(z')=-\frac{1}{z'^2}\cdot f\left(\frac{1}{z'}\right)$ tiene un polo en el origen. Además se dice que el residuo de f en el punto del infinito es el residuo de g en el punto $z'=0$. Así si $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-a)^n$ es el d. en s. de L. en un entorno del infinito (para $|z-a|>r$) $Res(f,+\infty)=c_{-1}$.

OBSERVACIÓN: Con esta definición, en el teorema de los residuos el punto del infinito puede pertenecer al conjunto *A*, si el conjunto Ω es no-acotado.

EJEMPLO: La función $f(z)=z+\frac{1}{z}$ tiene un polo en el origen y otro en el punto del infinito con residuos 1 y -1 respectivamente. De ahí que $\oint_{|z|=1} \omega+\frac{1}{\omega}d\omega=2\pi i$, ya sea considerando el origen o el punto del infinito como el polo interior a la curva $|z|=1$. También se puede hallar la integral por la fórmula integral de Cauchy, haciendo:

$$\oint_{|z|=1}\omega+\frac{1}{\omega}d\omega=\oint_{|z|=1}\frac{\omega^2+1}{\omega}d\omega=2\pi i\cdot\left(0^2+1\right)=2\pi i$$

Cálculo de residuos:

(1) Si $z_0\in C$, polo simple de f entonces: $Res(f,z_0)=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)\cdot f(z)$.

(2) z_0 polo simple de $f(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}$, con P y Q holomorfas en un entorno de z_0, z_0 cero simple de Q y $P(z_0)\neq 0$ entonces: $Res(f,z_0)=\frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}$. Para comprobar esta propiedad, basta aplicar la fórmula de (1) a la función f y hallar el límite mediante la regla de L'Hopital.

EJEMPLO: La función $f(z)=\dfrac{e^{iz}}{z^2+1}$ tiene polos simples en $z=\pm i$. $Res(f,i)=\dfrac{e^{-1}}{2i}=\dfrac{-i}{2e}$.

(3) z_0 polo múltiple de f, entonces la función $g(z)=(z-z_0)^k\cdot f(z)$ es holomorfa alrededor de z_0 y como el coeficiente de $(z-z_0)^{-1}$ en el desarrollo de Laurent de f es el de $(z-z_0)^{k-1}$ en el desarrollo de g, se tiene:

$$Res(f,z_0)=\lim_{z\to z_0}\left[(z-z_0)^k\cdot f(z)\right]^{(k-1)}\cdot\frac{1}{(k-1)!}$$

EJEMPLO: $f(z)=\dfrac{e^{iz}}{z(z^2+1)^2}$ tiene un polo simple en $z=0$ y dos dobles en $z=\pm i$.

$Res(f,i)=\dfrac{-3}{4e}$.

Teorema del interior y del exterior: Sean $F(z)=\dfrac{a_nz^n+\ldots+a_0}{b_mz^m+\ldots+b_0}$ con $m\geq n+2$ y γ un camino cerrado simple, *S* el conjunto de los polos interiores a γ y *S** el conjunto de los polos exteriores, entonces:

$$\int_\gamma F(z)dz=\begin{cases}2\pi i\cdot\sum_S Res(F,s)\\ -2\pi i\cdot\sum_{S^*}Res(F,s^*)\end{cases}$$

OBSERVACIÓN: En las hipótesis del teorema, el punto del infinito NO es un polo de *F*.

EJEMPLO: Si *n* es un entero no negativo, hallar el valor de la integral para $|b|>1$:

$$\int_{|z|=1}\frac{z+a}{z^n(z+b)}dz$$

Si f es la función subintegral, se tiene $I=-2\pi i\cdot Res(f,-b)=-2\pi i\cdot\lim_{z\to -b}\dfrac{z+a}{z^n}=\dfrac{2\pi i\cdot(a-b)}{(-1)^n b^n}$.