VARIABLE COMPLEJA III – TEOREMAS DE LIOUVILLE DEL MÓDULO MÁXIMO. FUNCIONES MEROMORFAS.

Lema Previo (Desigualdad de Cauchy): Sea $f \in \mathrm{H}(B(0,R))$ y supongamos que existe una constante *M* tal que $|f(z)| \leq M,\ \forall z \in B(0,R)$. Entonces

$$|f^{n}(0)| \leq \frac{M \cdot n!}{R^n}.$$

Demostración:

Sea $r\ /\ 0 < r < R$ cualquiera y $\gamma_r : |z| = r$. Entonces por la fórmula de Cauchy para las derivadas:

$$f^{n}(0) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_{\gamma_r} \frac{f(\omega)}{\omega^{n+1}}d\omega,$$ de donde, tomando módulos,

$$|f^{n}(0)| = \frac{n!}{2\pi}\cdot\left|\oint_{\gamma_r}\frac{f(\omega)}{\omega^{n+1}}d\omega\right| \leq \frac{n!}{2\pi}\cdot\sup_{\omega\in\gamma_r}\frac{|f(\omega)|}{|\omega^{n+1}|}\cdot 2\pi r \leq n!\cdot\frac{M}{r^{n+1}}\cdot r = \frac{n!\,M}{r^n}$$

Como esto se cumple cualquiera que sea $r < R$, se cumple también para *R*. ■

Teorema de Liouville: Si f es entera y acotada, entonces es constante.

Demostración:

Sean $R > 0$ cualquiera y $M\ /\ |f(z)| \leq M,\ \forall z \in C$. Entonces por las desigualdades de Cauchy:

$|f^{n}(0)| \leq \dfrac{M\cdot n!}{R^n}$. Como se puede elegir R tan grande como se quiera, se tiene

$$f^{n}(0) = 0,\ \forall n \geq 1 \ \Rightarrow\ f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{n)}(0)}{n!}\cdot z^n = f(0)$$ constante. ■

Teorema del módulo máximo: Sea Ω un abierto conexo y $f \in \mathrm{H}(\Omega)$. Si existe un punto $z_0 \in \Omega$, tal que $|f(z_0)| \geq |f(z)|,\ \forall z \in \Omega$, f es constante en Ω.

Demostración:

Sea $M = |f(z_0)|$. Si $M = 0$ el teorema es trivial. Supongamos $M > 0$.

Consideremos el conjunto $S = \{z \in \Omega\ /\ |f(z)| = M\}$.

$S \neq \varnothing$ pues por hipótesis $z_0 \in S$.

S es cerrado pues $S = |f|^{-1}(M)$ -por ser $|f|$ una función continua-.

S es abierto:

Sea $z \in S$ y $R > 0\ /\ \overline{B(z,R)} \subset \Omega$. Entonces por la fórmula integral de Cauchy se tiene $\forall\, r < R$:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\cdot\int_{|w-z|=r}\frac{f(\omega)}{\omega - z}d\omega = \frac{1}{2\pi i}\cdot\int_0^{2\pi}\frac{f(z+re^{it})}{re^{it}}\cdot ire^{it}dt = \frac{1}{2\pi}\cdot\int_0^{2\pi} f(z+re^{it})dt$$

de donde, tomando módulos:

.

$M = |f(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} |f(z+re^{it})| dt \Rightarrow \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \left(|f(z+re^{it})| - M \right) dt \geq 0$, pero por hipótesis, $|f(z+re^{it})| - M \leq 0$, por tanto $\int_0^{2\pi} \left(|f(z+re^{it})| - M \right) dt = 0$ y además $|f(z+re^{it})| = M, \forall t \in [0,2\pi]$ y $\forall \ r < R$, luego $B(z,r) \subset S$ y S es abierto.

Como Ω es conexo se tiene $S = \Omega \Rightarrow |f| = cte.$ en $\Omega \Rightarrow f = cte.$ en Ω. ■

Corolario (Teorema del módulo mínimo): Sea Ω un abierto conexo y $f \in H(\Omega)$, $f(z) \neq 0$, $\forall z \in \Omega$. Si existe $z_0 \in \Omega$, tal que $|f|$ tiene un mínimo relativo z_0, entonces f es constante en Ω.

Demostración:
Basta aplicar el teorema anterior a la función $1/f$.

Definición: Se dice que f es una función meromorfa en un abierto Ω si existe un conjunto $A \subset \Omega$ tal que:

1) A no tiene puntos de acumulación en Ω
2) $f \in H(\Omega - A)$ y
3) f posee un polo en cada punto de A.

OBSERVACIÓN: Toda función holomorfa en un abierto, es meromorfa en él. Representaremos las funciones meromorfas en Ω por $M(\Omega)$.

Teorema de los residuos: Sea Ω un abierto y $f \in M(\Omega)$, y A el conjunto de sus polos. Si Γ es un ciclo en $\Omega - A$ tal que $Ind_\Gamma(\alpha) = 0 \ \forall \ \alpha \notin \Omega$, entonces:

$$\frac{1}{2\pi i} \cdot \int_\Gamma f(z)dz = \sum_{a \in A} \operatorname{Res}(f,a) \cdot Ind_\Gamma(a)$$

EJEMPLO: Comprobar que la función $f(z) = \dfrac{\pi z}{\operatorname{sen}(\pi z)} \in M(C)$, y $A = Z - \{0\}$. Calcular también $\operatorname{Res}(f,a)$ para cada $a \in Z$.

Definición: Llamaremos serie de LAURENT centrada en un punto a a toda expresión formal del tipo

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n, \text{ con } c_n \in C \text{ y } z \in C.$$

Teorema: La serie de Laurent anterior converge uniforme y absolutamente en cada compacto del anillo circular $\Omega = \{z \in C : r < |z-a| < R\}$ donde se supone $r < R$ y $r = \overline{lim} \sqrt[n]{c_{-n}}$ y $R = \left(\overline{lim} \sqrt[n]{c_n}\right)^{-1}$.

Teorema: Sea Ω un abierto, $a \in \Omega$ y $f \in H(\Omega - \{a\})$. Entonces existe una única serie de Laurent centrada en a que converge uniforme y absolutamente en cada compacto del conjunto

$$\Omega_0 = B(a, dis(a, Fr(\Omega))) - \{a\}.$$

.