UNIVERSIDAD DE LAS PALMAS DE GRAN CANARIA
Escuela Técnica Superior de Ingenieros
de Telecomunicación

Descripción del Pde ToolBox
para resolver algunas ecuaciones de la Física-Matemática

Ampliación de Matemáticas
ETSI de Telecomunicación

Himar Alonso Díaz
Lara González Villanueva

Índice

1. Introducción

El presente trabajo tiene por objeto realizar un análisis de algunas ecuaciones de la Física-Matemática, y la forma de resolverlas utilizando un programa informático, que nos facilitará bastante la tarea. De hecho, no será necesario aplicar los métodos de resolución que conocemos; basta con introducir todos los parámetros y seguir una serie de pasos sencillos.

En estudios como *Ingeniería de Telecomunicación*, donde se hace un uso muy *pragmático* de las Matemáticas, resulta conveniente tener a disposición alguna herramienta para resolver problemas concretos. Lo que se describe a continuación, es la utilización de una de éstas.

1.1. Ecuaciones de la Física-Matemática

Hemos elegido tres casos de estas ecuaciones y un ejemplo de cada una de ellas, para explicar su resolución:

Ecuación del calor o caso *parabólico.*

Ecuación de ondas o caso *hiperbólico.*

Ecuación de Laplace o caso *elíptico.*

En cada sección se describe cómo se resuelve cada uno de los ejemplos[1] de manera analítica, así como su resolución haciendo uso del ordenador.

1.2. El entorno de trabajo: Matlab

Matlab es un programa de cálculo numérico destinado principalmente al trabajo con matrices. De ahí su nombre: Matlab, *laboratorio de matrices.*

Existen varios *packages* que permiten hacer un uso especializado del programa según el entorno concreto al que lo estemos destinando.

En nuestro caso, en primer lugar haremos una representación gráfica de las soluciones obtenidas analíticamente. Sin embargo, veremos que será más cómodo utilizar un *paquete* específico llamado Pde ToolBox, con el que podremos obtener la solución gráfica de los problemas comentados anteriormente, sin necesidad de hacer ningún cálculo, sólo introduciendo los parámetros característicos de cada ecuación tal y como se describe a continuación.

Para acceder al *paquete* Pde ToolBox, nos situaremos en la línea de comandos de Matlab[1] y tecleamos:

```
>> pdetool
```

Pulsamos *Enter* y se abre una ventana con un nuevo entorno *gráfico*, con el que trabajaremos a partir de ahora en las secciones 2.2, 3.2 y 4.2.

En Pde ToolBox tendremos que especificar varios aspectos de la ecuación a resolver. Por lo tanto tendremos que acceder a las diferentes secciones, que son:

[1]Suponemos al lector familiarizado con este entorno.

Draw Mode nos permitirá crear la región en que se nos pide resolver el problema. Al tratarse de una utilidad gráfica, podemos dibujar esta región de manera sencilla, y además, podemos definir formas complejas partiendo de figuras elementales —como cuadrados, circunferencias. . . —.

Boundary Mode divide la región que hemos creado en diferentes segmentos. Al hacer doble *click* sobre cada uno de ellos introducimos las condiciones de contorno[2] —que pueden ser de tipo *Neumann* o de tipo *Dirichlet*—.

PDE Mode es la sección en que debemos especificar el tipo de ecuación que queremos resolver, así como las constantes y funciones que nos den en el enunciado del problema. Las ecuaciones que vienen en Pde ToolBox son muy genéricas; en cada apartado se dirá qué valores concretos hay que introducir.

Mesh Mode nos permite definir la *malla* en la que se obtendrán soluciones del problema —*grosso modo*, la *resolución* que tendrá la gráfica resultante (cuanto más fina sea la malla, mejor resolución)—.

Solve PDE es el comando que ordena resolver la ecuación. En este menú podremos incluir las condiciones iniciales, haciendo *click* en el submenú *Parameters. . .*

Plot Solution por último, es un menú en el que podemos indicar varias opciones para visualizar el resultado gráfico. En lo que respecta al presente trabajo, podemos poner que represente la solución en tres dimensiones y, en el caso de la *Ecuación del calor* y la *Ecuación de ondas* además que genere una animación.

[2]En clase hemos estudiado el caso de un segmento de *recta* con condiciones de contorno en ambos extremos de la misma; en Pde ToolBox tendremos que especificar dichas condiciones en dos dimensiones.

2. Ecuación del calor

La ecuación del calor, tal y como la define el Pde ToolBox, tiene la forma

$$d\frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}(c \operatorname{grad} u) + au = f$$

El caso que hemos estudiado en clase resulta de una *simplificación* de éste, considerando $f = 0$, $a = 0$, y $\alpha^2 = \frac{c}{d} \equiv$ cte., de forma que nos queda:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \qquad \text{o lo que es lo mismo} \qquad u_t = \alpha^2 u_{xx}$$

donde $u(x,t)$ es una función que nos indica la temperatura de la posición x, en el instante t.

2.1. Definición del problema con un ejemplo

El siguiente es un ejemplo de la ecuación del calor *homogénea* con condiciones de contorno —de tipo *Neumann*— *homogéneas* y con una condición inicial.

$$\begin{array}{l} \mathbf{u_t} = \alpha^{\mathbf{2}}\mathbf{u_{xx}} \quad \text{con} \quad 0 < x < L \quad \text{y} \quad t > 0 \\ u_x(0,t) = 0 \\ u_x(L,t) = 0 \\ u(x,0) = \phi(x) \end{array}$$

1. En primer lugar aplicamos el método de Fourier de separación de variables, para lo cual suponemos que el problema tendrá una solución del estilo $u(t,x) = T(t)X(x)$:

   $$\begin{array}{l} u_t = T'(t)X(t) \\ u_{xx} = X''(x)T(t) \end{array}$$

   de acuerdo con la definición del problema, deducimos:

   $$\frac{T'(t)}{T(t)} = \alpha^2 \frac{X''(x)}{X(x)}$$

   Soluciones *generales* del problema:

   $$\begin{array}{l} X(t) = A\cos\frac{\lambda}{\alpha}x + B\operatorname{sen}\frac{\lambda}{\alpha}x \\ T(t) = Ce^{-\lambda^2 t} \end{array}$$

   Dado que la solución es $T(t)X(x)$, hallamos el producto de las expresiones anteriores, teniendo en cuenta las siguientes asignaciones: $A = AC$ y $B = BC$, ya que el producto de estas constantes no aporta información.

   $$u(x,t) = e^{-\lambda^2 t}\left(A\cos\frac{\lambda}{\alpha}x + B\operatorname{sen}\frac{\lambda}{\alpha}x\right)$$

2. Hallamos λ imponiendo las condiciones de contorno (CCH):

$$\text{CCH}\begin{cases} u_x(0,t)=0 \\ u_x(L,t)=0 \end{cases}$$

$$u_x(x,t)=e^{-\lambda^2 t}\left(-A\tfrac{\lambda}{\alpha}\operatorname{sen}\tfrac{\lambda}{\alpha}x+B\tfrac{\lambda}{\alpha}\cos\tfrac{\lambda}{\alpha}x\right)$$

Sustituimos en la primera condición:

$$u_x(0,t)=e^{-\lambda^2 t}\left(-A\frac{\lambda}{\alpha}\operatorname{sen}0+B\frac{\lambda}{\alpha}\cos 0\right)=0$$

Vemos que el primer sumando del paréntesis se anula, porque $\operatorname{sen}0=0$. Además al tener la expresión igualada a cero, sólo cabe que $\lambda=0$ o bien que $B=0$, porque el factor exponencial nunca se anulará. Siendo $\lambda=0$ una *solución trivial*, supongamos que $B=0$.

Sustituimos ahora en la segunda condición:

$$u_x(L,t)=e^{-\lambda^2 t}\left(-A\frac{\lambda}{\alpha}\operatorname{sen}\frac{\lambda}{\alpha}L\right)=0$$

En este caso tenemos que $\lambda=0$ y $A=0$ conducen a la solución $u(x,t)=0$, que es *solución trivial*, o bien *no* es solución del problema. Nos interesa estudiar el caso $\operatorname{sen}\frac{\lambda}{\alpha}L=0$, con el que obtendremos los *autovalores* de λ:

$$\operatorname{sen}\tfrac{\lambda}{\alpha}L=0 \quad\Rightarrow\quad \tfrac{\lambda}{\alpha}L=n\pi$$

los autovalores de λ son $\qquad \lambda=\frac{n\pi\alpha}{L} \qquad$ con $n\in\mathbb{N}$

y las *autofunciones*:

$$X_n=A_n\cos\frac{n\pi}{L}x \qquad \text{con } n\in\mathbb{N}$$

por lo que cualquier expresión del estilo:

$$u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n e^{-\frac{n^2\pi^2\alpha^2}{L^2}t}\cos\frac{n\pi}{L}x$$

es solución del problema.

3. Imponemos la condición inicial (CI):

$$u(x,0)=\phi(x)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n\cos\frac{n\pi}{L}x$$

donde los A_n son los coeficientes del *desarrollo en Serie de Fourier* en $\cos\frac{n\pi}{L}x$ de la función $\phi(x)$, y podemos calcularlos:

$$A_n=\frac{2}{L}\int_0^L\phi(x)\cos\frac{n\pi}{L}x\,\mathrm{d}x$$

$\square$

2.2. Resolución del problema, haciendo uso del Pde ToolBox

En Pde ToolBox tenemos que introducir datos concretos para obtener el resultado gráfico. De manera que daremos un valor concreto —de ejemplo— a la variable $L = \pi$, a la variable $\alpha = 0{,}2$ y a la función $\phi x = \cos(x) - \cos(3x) + 0{,}75$, quedando el enunciado del problema:

$$\begin{array}{l} \mathbf{u_t} = \alpha^2 \mathbf{u_{xx}} \quad \text{con} \quad 0 < x < \pi \quad \text{y} \quad t > 0 \\ u_x(0,t) = 0 \\ u_x(\pi,t) = 0 \\ u(x,0) = \cos(x) - \cos(3x) + 0{,}75 \end{array}$$

Sustituyendo estos valores en la solución analítica estudiada en el apartado anterior, nos queda:

1. $$\phi(x) = \cos(x) - \cos(3x) + 0{,}75$$

2. $$A_n = \begin{cases} 0{,}75 & \text{si } n = 0 \\ 1 & \text{si } n = 1 \\ -1 & \text{si } n = 3 \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

3. $$u(x,t) = 0{,}75 + e^{-(0{,}2)^2 t} \cos(x) - e^{-3^2 (0{,}2)^2 t} \cos(3x)$$

Para introducir los datos del problema y obtener la representación gráfica de esta ecuación, debemos iniciar el Pde ToolBox y seguir los siguientes pasos:

- En *Draw Mode* dibujamos un cuadrado *alineado* con los ejes coordenados del primer cuadrante, y de dimensiones $\pi \times \pi$
- En *Boundary Mode* seleccionamos condiciones de contorno de tipo *Neumann*, e inicializamos:
  - $g = 0$
  - $q = 0$
- En *PDE > PDE Specification* marcamos la opción de ecuación parabólica, ya que la ecuación del calor es de este tipo. Los valores de los coeficientes serán los siguientes:
  - $c = 0{,}04$
  - $a = 0$
  - $f = 0$
  - $d = 1$

- Mediante *Mesh Mode* creamos la malla necesaria para la resolución. Si queremos que la definición de la gráfica sea más exacta, sólo tenemos que ir a *Refine Mesh*.

- Para resolver la ecuación vamos a *Solve* > *Solve Parameters* y definimos nuestra $\phi(x)$ en $u(t0) = \cos(x) - \cos(3 * x) + 0{,}75$. A continuación, *Solve PDE*.

- En *Plot* > *Parameters* seleccionamos *Color* , *Height (3-D Plot)* y *Animation*. Finalmente, la resolución gráfica de nuestra ecuación nos la proporciona *Plot* > *Plot Solution* (ver Fig. 1).

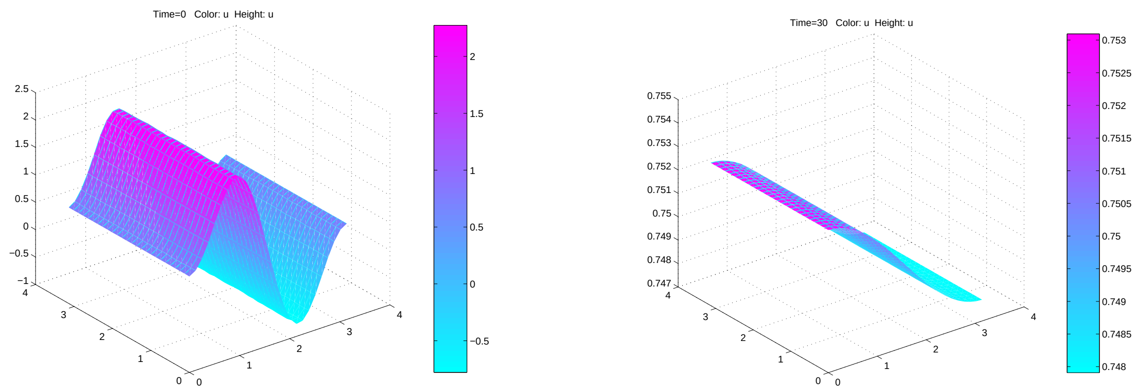

Figura 1: Resultado gráfico de la ecuación del calor

Para comparar el resultado gráfico obtenido utilizando Pde ToolBox, con el de la solución analítica, vea el Apéndice A.

3. Ecuación de ondas

La ecuación de ondas, tal y como la define el Pde ToolBox, tiene la forma

$$d\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \operatorname{div}(c \operatorname{grad} u) + au = f$$

El caso que hemos estudiado en clase resulta de una *simplificación* de éste, considerando $f = 0$, $a = 0$, y $\alpha^2 = \frac{c}{d} \equiv$ cte., de forma que nos queda:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \qquad \text{o lo que es lo mismo} \qquad u_{tt} = \alpha^2 u_{xx}$$

lo cual viene a significar, de modo intuitivo, que la *aceleración*, u_{tt}, (i.e. de una onda que se propaga por una cuerda), es proporcional (α^2) a la *concavidad o convexidad*, u_{xx}, de la misma.

3.1. Definición del problema con un ejemplo

El siguiente es un ejemplo de la ecuación de ondas *homogénea* con condiciones de contorno —de tipo *Dirichlet*— *homogéneas* y con dos condiciones iniciales.

$$\begin{array}{l} \mathbf{u_{tt} = u_{xx}} \quad \text{con} \quad 0 < x < \pi \quad \text{y} \quad t > 0 \\ u(0,t) = 0 \\ u(L,t) = 0 \\ u(x,0) = \operatorname{sen} 3x \\ u_t(x,0) = 12 \operatorname{sen} 6x \end{array}$$

1. En primer lugar aplicamos el método de Fourier de separación de variables, para lo cual suponemos que el problema tendrá una solución del estilo $u(t,x) = T(t)X(x)$:

$$\begin{array}{l} u_{tt} = T''(t)X(t) \\ u_{xx} = X''(x)T(t) \end{array}$$

de acuerdo con la definición del problema, deducimos:

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\beta^2$$

Soluciones *generales* del problema:

$$\begin{array}{l} T(t) = A \operatorname{sen} \beta t + B \cos \beta t \\ X(x) = C \operatorname{sen} \beta x + D \cos \beta x \end{array}$$

2. Hallamos β imponiendo las condiciones de contorno (CCH):

$$\text{CCH} \left\{ \begin{array}{l} u(0,t) = 0 \\ u(L,t) = 0 \end{array} \right.$$

$$u(x,t) = (A \operatorname{sen} \beta t + B \cos \beta t)(C \operatorname{sen} \beta x + D \cos \beta x)$$

Sustituimos en la primera condición:

$$u(0,t) = (A \operatorname{sen} \beta t + B \cos \beta t)(C \operatorname{sen} \beta 0 + D \cos \beta 0) = 0$$

Deducimos de esta expresión que $D = 0$.

Sustituimos ahora en la segunda condición:

$$u(L,t) = (A \operatorname{sen} \beta t + B \cos \beta t)(C \operatorname{sen} \beta L) = 0$$

Vemos que, al igual que en el caso de la *ecuación del calor*, probar con $C = 0$ nos conduciría a una *solución trivial*, así que estudiaremos el caso $\operatorname{sen} \beta L = 0$ para obtener los *autovalores* de β:

$$\operatorname{sen} \beta L = 0 \quad \Rightarrow \quad \beta L = n\pi$$

$$\text{los autovalores de } \beta \text{ son} \qquad \beta = \tfrac{n\pi}{L} \qquad \text{con } n \in \mathbb{N}$$

Como además en la definición del problema teníamos $L = \pi$,

$$\beta = \frac{n\pi}{\pi} = n \qquad \text{con } n \in \mathbb{N}$$

y a continuación, la expresión de las *autofunciones*:

$$X_n = A_n \operatorname{sen} nx$$

por lo que cualquier expresión del estilo:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen} nx (A_n \operatorname{sen} nt + B_n \cos nt)$$

es solución del problema[3].

3. Imponemos las condiciones iniciales (CI):

   Primera condición:

$$u(x,0) = \operatorname{sen} 3x = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen} nx (A_n \operatorname{sen} 0 + B_n \cos 0)$$

   simplificamos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen} nx = \operatorname{sen} 3x$$

   En este caso es fácil hallar los B_n sin necesidad de utilizar la fórmula del *desarrollo en Serie de Fourier*, puesto que:

[3] Al igual que en el caso de la *Ecuación del calor*, hemos hecho las asignaciones: $A_n = C_n A_n$ y $B_n = C_n B_n$

$$B_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 3 \\ 0 & \text{si } n \neq 3 \end{cases}$$

Para la segunda condición necesitaremos $u_t(x,t)$, por lo que derivaremos $u(x,t)$, respecto de t:

$$u_t(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen} nx(nA_n \cos nt - nB_n \operatorname{sen} nt)$$

Segunda condición:

$$u_t(x,0) = 12 \operatorname{sen} 6x = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen} nx(nA_n \cos 0 - nB_n \operatorname{sen} 0)$$

simplificamos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} nA_n \operatorname{sen} nx = 12 \operatorname{sen} 6x$$

Al igual que con los B_n, para el cálculo de los A_n no emplearemos la fórmula, pues podemos obtener la expresión más fácilmente:

$$12 = 6A_6 \quad \Rightarrow \quad A_6 = 2$$

Por lo que:

$$A_n = \begin{cases} 2 & \text{si } n = 6 \\ 0 & \text{si } n \neq 6 \end{cases}$$

En este caso, las condiciones iniciales nos han permitido obtener una solución *sencilla* para expresar el resultado, dado que el número de coeficientes A_n y B_n es finito:

$$u(x,t) = 2 \operatorname{sen}(6x) \operatorname{sen}(6t) + \operatorname{sen}(3x) \cos(3t)$$

□

3.2. Resolución del problema, haciendo uso del Pde ToolBox

En este caso, cuando trabajemos con Pde ToolBox no necesitamos dar ningún valor a los parámetros del problema, pues éstos ya vienen especificados:

$$\begin{array}{l} \mathbf{u_{tt}} = \mathbf{u_{xx}} \quad \text{con} \quad 0 < x < \pi \quad \text{y} \quad t > 0 \\ u(0,t) = 0 \\ u(\pi,t) = 0 \\ u(x,0) = \operatorname{sen}(3x) \\ u_t(x,0) = 12 \operatorname{sen}(6x) \end{array}$$

Tomamos la solución analítica obtenida en el apartado anterior:

$$u(x,t) = 2\,\mathrm{sen}\,(6x)\,\mathrm{sen}\,(6t) + \mathrm{sen}\,(3x)\cos{(3t)}$$

Para introducir los datos del problema y obtener la representación gráfica de esta ecuación, debemos iniciar el Pde ToolBox y seguir los siguientes pasos:

- En *Draw Mode* dibujamos un cuadrado *alineado* con los ejes coordenados del primer cuadrante, y de dimensiones $\pi \times \pi$
- En *Boundary Mode* seleccionamos condiciones de contorno de tipo *Dirichlet*, e inicializamos:
    - $h = 1$
    - $r = 0$
- En *PDE > PDE Specification* marcamos la opción de ecuación hiperbólica, ya que la ecuación de ondas es de este tipo. Los valores de los coeficientes serán los siguientes:
    - $c = 1$
    - $a = 0$
    - $f = 0$
    - $d = 1$
- Mediante *Mesh Mode* creamos la malla necesaria para la resolución. Si queremos que la definición de la gráfica sea más exacta, sólo tenemos que ir a *Refine Mesh.*
- Para resolver la ecuación vamos a *Solve > Solve Parameters* y definimos nuestras condiciones iniciales:
    - $u(t0) = \sin{(3 * x)}$
    - $u'(t0) = 12 * \sin{(6 * x)}$

  A continuación, *Solve PDE.*
- En *Plot > Parameters* seleccionamos *Color* , *Height (3-D Plot)* y *Animation.* Finalmente, la resolución gráfica de nuestra ecuación nos la proporciona *Plot > Plot Solution* (ver Fig. 2).

Para comparar el resultado gráfico obtenido utilizando Pde ToolBox, con el de la solución analítica, vea el Apéndice B.

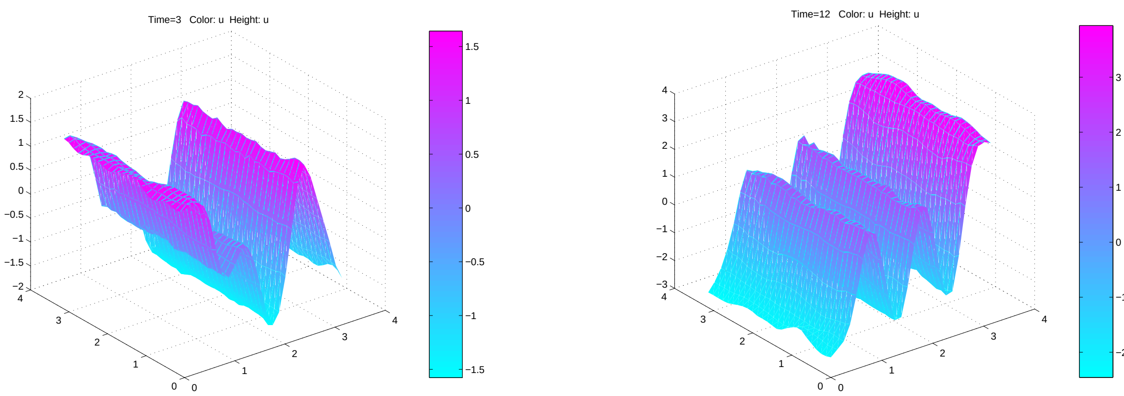

Figura 2: Resultado gráfico de la ecuación de ondas

4. Ecuación de Laplace

La ecuación de Laplace (o de *Poisson*, en general), tal y como la define el Pde ToolBox, tiene la forma

$$-\operatorname{div}(c \operatorname{grad} u) + au = f$$

El caso que hemos estudiado en clase resulta de una *simplificación* de éste, considerando $f = 0$, $a = 0$, y $c = 1$, de forma que nos queda:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial y^2} = 0 \qquad \text{que se puede representar así} \qquad \Delta u = 0$$

4.1. Definición del problema con un ejemplo

El siguiente es un ejemplo de la ecuación de Laplace (caso *homogéneo* de la *Ecuación de Poisson*) en un rectángulo, con condiciones de contorno —de tipo *Dirichlet*—.

$$\begin{array}{l} \mathbf{u_{xx} + u_{yy} = 0} \quad \text{con} \quad 0 < x < \pi \quad \text{y} \quad 0 < y < A \\ \left.\begin{array}{l} u(0,y) = 0 \\ u(\pi,y) = 0 \end{array}\right\} \text{para} \quad 0 < y < A \\ \left.\begin{array}{l} u(x,A) = 0 \\ u(x,0) = f(x) \end{array}\right\} \text{para} \quad 0 < x < \pi \end{array}$$

1. En primer lugar aplicamos el método de Fourier de separación de variables, para lo cual suponemos que el problema tendrá una solución del estilo $u(x,y) = X(x)Y(y) + \text{EDP}$:

$$X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = 0$$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{-Y''(y)}{Y(y)} = \lambda$$

   Las suposiciones $\lambda = 0$ y $\lambda > 0$ nos conducirían bien a una solución imposible del problema, bien a que la función es idénticamente nula ($u(x,y) \equiv 0$). Por ello supondremos de entrada que $\lambda < 0, \quad \lambda = -\beta^2$, de modo que las soluciones *generales* serían:

$$X(x) = A \operatorname{sen} \beta x + B \cos \beta x$$

$$Y(y) = C \operatorname{Sh} \beta y + D \operatorname{Ch} \beta y$$

2. Hallamos β imponiendo las condiciones de contorno:

$$u(0,y) = 0 \quad \rightarrow \quad X(0) = A \operatorname{sen} 0 + B \cos 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad B = 0$$

$$u(\pi,y) = 0 \quad \rightarrow \quad X(\pi) = A \operatorname{sen} \beta\pi = 0$$

Nuevamente nos hallamos ante un caso en el que probar con $A = 0$ nos lleva a una *solución trivial*, por lo que estudiaremos el caso $\operatorname{sen}\beta\pi = 0$, con lo cual obtendremos los *autovalores* de β:

$$\operatorname{sen}\beta\pi = 0 \quad \Rightarrow \quad \beta\pi = n\pi$$

$$\text{los autovalores de } \beta \text{ son} \qquad \beta = n \qquad \text{con } n \in \mathbb{N}$$

y las *autofunciones*:

$$X_n(x) = \operatorname{sen} nx \qquad \text{con } n \in \mathbb{N}$$

Sigamos con las condiciones de contorno:

$$u(x, A) = Y(A) = C \operatorname{Sh}\beta A + D \operatorname{Ch}\beta A = 0$$

Nota: Para obtener el resultado de forma más inmediata, escribiremos $Y(y)$ de otra manera:

$$Y(y) = C^* \operatorname{Sh}\beta(A - y) + D^* \operatorname{Ch}\beta(A - y)$$

Sustituyendo de nuevo, en la condición de contorno, queda:

$$u(x, A) = Y(A) = C^* \operatorname{Sh}\beta 0 + D^* \operatorname{Ch}\beta 0 \quad \Rightarrow \quad D^* = 0$$

3. La solución general sería:

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} E_n \operatorname{Sh}(n(A - y)) \operatorname{sen} nx$$

que sustituyendo en la última condición de contorno, *no homogénea*, queda:

$$u(x, 0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} E_n \operatorname{Sh}(nA) \operatorname{sen} nx$$

donde los E_n son los coeficientes del *desarrollo en Serie de Fourier* de la función $f(x)$, y podemos calcularlos:

$$E_n = \frac{2}{\pi \operatorname{Sh}(nA)} \int_0^{\pi} f(x) \operatorname{sen} nx \,\mathrm{d}x$$

□

4.2. Resolución del problema, haciendo uso del Pde ToolBox

En Pde ToolBox tenemos que introducir datos concretos para obtener el resultado gráfico. De manera que daremos un valor concreto —de ejemplo— a la variable $A = \pi$ y a la función $f(x) = 4\,\mathrm{Sh}\,(\pi)\sin x$, quedando el enunciado del problema:

$$\begin{array}{l}
\mathbf{u_{xx}} + \mathbf{u_{yy}} = \mathbf{0} \quad \text{con} \quad 0 < x < \pi \quad \text{y} \quad 0 < y < \pi \\
\left.\begin{array}{l} u(0,y) = 0 \\ u(\pi,y) = 0 \end{array}\right\} \text{para} \quad 0 < y < \pi \\
\left.\begin{array}{l} u(x,A) = 0 \\ u(x,0) = 4\,\mathrm{Sh}\,(\pi)\,\mathrm{sen}\,x \end{array}\right\} \text{para} \quad 0 < x < \pi
\end{array}$$

Sustituyendo estos valores en la solución analítica estudiada en el apartado anterior, nos queda:

1. $$f(x) = 4\,\mathrm{Sh}\,(\pi)\,\mathrm{sen}\,x$$

2. $$E_n = \begin{cases} 4 & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{si } n \neq 1 \end{cases}$$

3. $$u(x,y) = 4\,\mathrm{Sh}\,(\pi - y)\,\mathrm{sen}\,x$$

Para introducir los datos de esta ecuación, debemos iniciar el Pde ToolBox y seguir los siguientes pasos:

- En *Draw Mode* dibujamos un cuadrado *alineado* con los ejes coordenados del primer cuadrante, y de dimensiones $\pi \times \pi$
- En *Boundary Mode* seleccionamos condiciones de contorno de tipo *Dirichlet*, e inicializamos todos los lados a:
  - $h = 1$
  - $r = 0$

  a excepción del lado $u(x,0)$ —inferior— en el que la condición de contorno es:
  - $h = 0$
  - $r = 4 * \sinh(pi) * \sin(x)$
- En *PDE > PDE Specification* marcamos la opción de ecuación elíptica, ya que la ecuación de Laplace es de este tipo. Los valores de los coeficientes serán los siguientes:
  - $c = 1$
  - $a = 0$

- $f = 0$

- Mediante *Mesh Mode* creamos la malla necesaria para la resolución. Si queremos que la definición de la gráfica sea más exacta, sólo tenemos que ir a *Refine Mesh*.

- Para resolver la ecuación vamos a *Solve PDE*.

- En *Plot > Parameters* seleccionamos *Color* y *Height (3-D Plot)*.
  Finalmente, la resolución gráfica de nuestra ecuación nos la proporciona *Plot > Plot Solution* (ver Fig. 3).

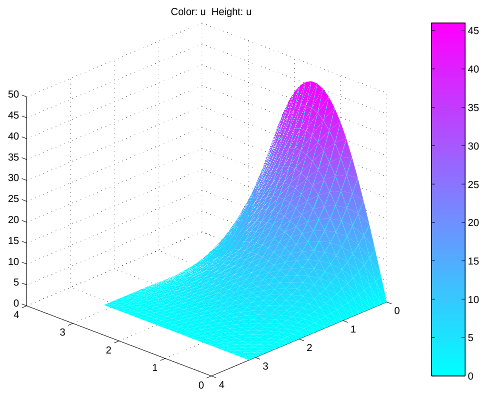

Figura 3: Resultado gráfico de la ecuación de Laplace

Para comparar el resultado gráfico obtenido utilizando Pde ToolBox, con el de la solución analítica, vea el Apéndice C.

A. Apéndice A: Ecuación del calor en Matlab

```
%
% Este código nos permite visualizar de manera gráfica
% el resultado que obtuvimos al resolver de forma analítica
% la ecuación del calor.
%
    % Hemos dado a alpha un valor de 0.2
alpha=0.2;
  % Vector ordenado para representar cada f(x)
x = [0:.05:pi];
Mv = moviein(120);
count = 1;
  % Hacemos variar t para obtener f(x)
  % en distintos instantes
for t=0:120,...
        u = exp(-(alpha)^2*t)*cos(x)...
         -exp(-3^2*(alpha)^2*t)*cos(3*x)+.75;...
        plot(x,u);...
        title(t);...
        axis([0 pi -1 2.5]);...
        Mv(:,count) = getframe;...
        count = count + 1;...
end
title('');...
movie(Mv)
```

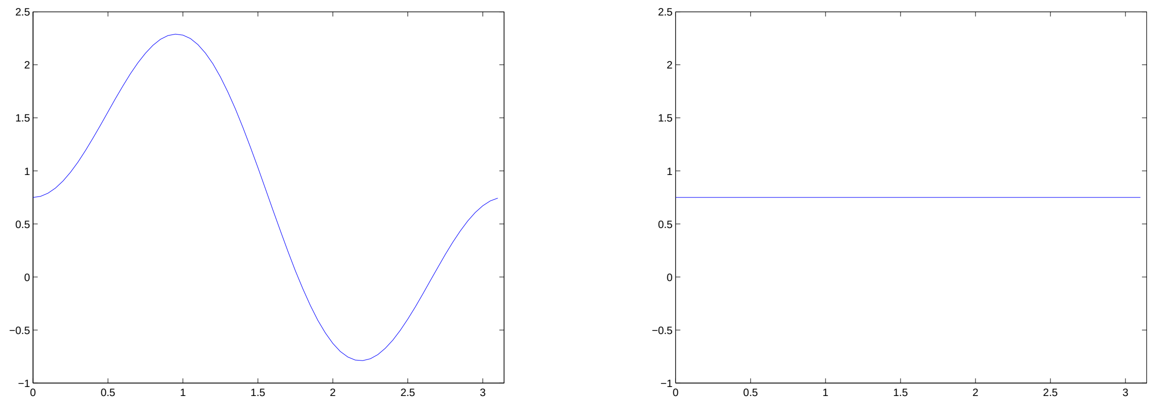

Figura 4: Resultado gráfico de la ecuación del calor

B. Apéndice B: Ecuación de ondas en Matlab

```
%
% Este código nos permite visualizar de manera gráfica
% el resultado que obtuvimos al resolver de forma analítica
% la ecuación de ondas.
%
  % Vector ordenado para representar cada f(x)
x = [0:.05:pi];
Mv = moviein(100);
count = 1;
  % Hacemos variar t para obtener f(x)
  % en distintos instantes
for t=1:0.09:10,...
        u = 2*sin(6*x)*sin(6*t) + sin(3*x)*cos(3*t);...
        plot(x,u);...
        title(t);...
        axis([0 pi -5 5]);...
        Mv(:,count) = getframe;...
        count = count + 1;...
end
title('');...
movie(Mv)
```

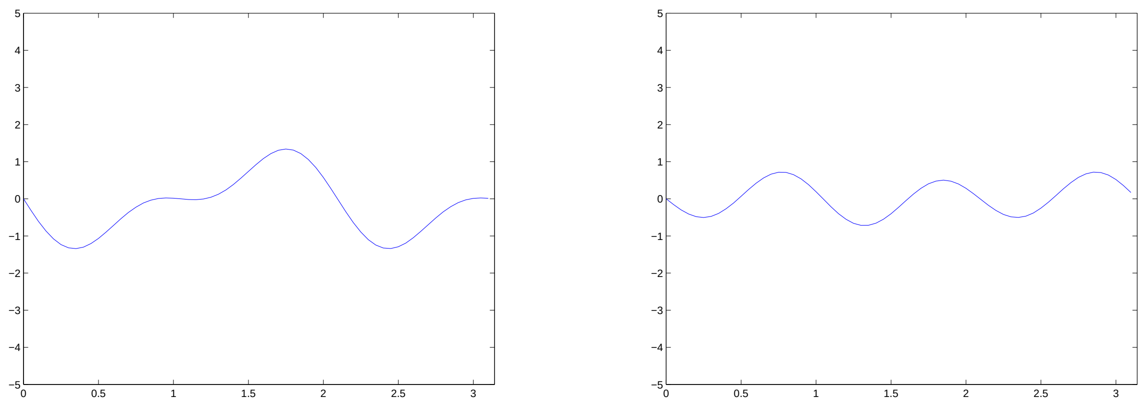

Figura 5: Resultado gráfico de la ecuación de ondas

C. Apéndice C: Ecuación de Laplace en Matlab

```
%
% Este código nos permite visualizar de manera gráfica
% el resultado que obtuvimos al resolver de forma analítica
% la ecuación de Laplace.
%
[x,y]=meshgrid(0:.05:pi);
u = 4*sinh(pi-y)/length(y)*sin(x);
% Ahora se muestra la gráfica en el entorno que nosotros
% hemos especificado: un cuadrado alineado en el origen y
% de lado pi.
mesh(x,y,u)
```

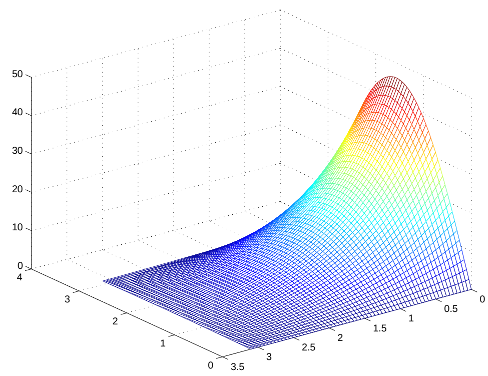

Figura 6: Resultado gráfico de la ecuación de Laplace

Referencias

[1] Todos los ejemplos han sido tomados de los apuntes de la clase de *Ampliación de Matemáticas* del profesor Ángel Plaza de la Hoz.