TIEMPO ESTIMADO: 2 horas 30 minutos

(1.5 p.) **1** Encontrar el desarrollo de la función $u = u(x,t)$ en el origen hasta los términos de orden menor o igual a dos si:

$$\left.\begin{aligned} u_t &= u + \cos u_x \\ u(0,x) &= \pi x - \frac{\pi}{4}x^2 \end{aligned}\right\}.$$

Solución:

Las funciones que aparecen en el problema son analíticas, se cumplen las condiciones del teorema de Cauchy-Kovalevsky y se puede encontrar la solución en serie de Taylor en el origen. La solución resulta:

$$u(t,x) = \pi x - t - \frac{\pi}{4}x^2 + \pi x t - \frac{1}{2}t^2 + \cdots. \qquad \square$$

(2.5 p.) **2** Hallar $u(x,t)$ si $u_{tt} = u_{xx}$; $0 < x < \pi$, $0 < t$, con condiciones de contorno tipo Dirichlet nulas y condiciones iniciales $u(x,0) = 0$ y $u_t(x,0) = \operatorname{sen}(2x)$.

Solución:

Aplicando el método de separación de variables con las condiciones de contorno $u(0,t) = 0$, $u(\pi,t) = 0$ se obtiene la solución en la forma

$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}(A_n \cos nt + B_n \operatorname{sen} nt)\operatorname{sen}(nx)$. Por las condiciones iniciales:

$u(x,0) = 0 \Rightarrow 0 = \sum_{n=1}^{\infty}(A_n \cos 0 + B_n \operatorname{sen} 0)\operatorname{sen}(nx) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen}(nx)$, y por tanto $A_n = 0$.

$u_t(x,0) = \operatorname{sen}(2x) \Rightarrow \operatorname{sen}(2x) = \sum_{n=1}^{\infty}(nB_n \cos 0)\operatorname{sen}(nx)$, y por tanto

$B_n = 0$, si $n \neq 2$, y $2B_2 = 1 \Rightarrow B_2 = \frac{1}{2}$

La solución resulta entonces:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2t)\operatorname{sen}(2x) \qquad \square$$

(1.5 p.) **3** Hallar la serie de Laurent en el origen de la función:

$$f(z) = \frac{e^{az} - 1}{z}$$

¿Qué tipo de singularidad tiene la función en el origen?

Solución:

Para hallar la serie de Laurent se puede utilizar la serie de Taylor de la función $g(z)=e^{az}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(az)^n}{n!}$. De donde: $f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n!}z^{n-1}$.

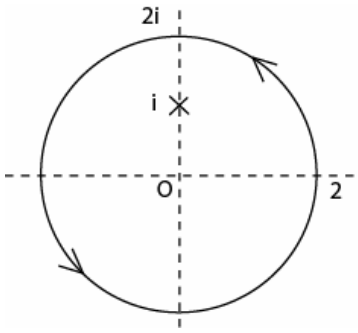
Como la serie de Laurent resulta una serie de potencias, la singularidad en el origen es evitable. Nótese, también que $\lim_{z\to 0} f(z)=\lim_{z\to 0}\frac{e^{az}-1}{z}=a$. □

(3.0 p.) **4** Calcular las siguientes integrales mediante integración en el plano complejo:

(a) $\oint_{|z|=2}\frac{\operatorname{sen} z\,dz}{(z-i)^3}$; (b) $\int_0^{\infty}\frac{dx}{1+x^4}$

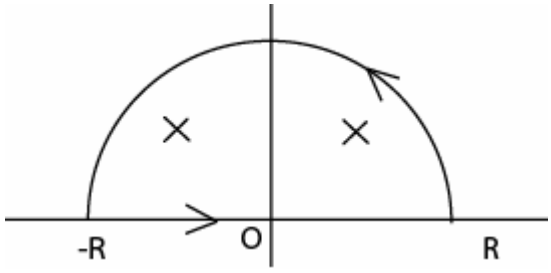
Solución:

(a) La integral es sobre la circunferencia de centro el origen y radio 2. La función subintegral tiene un polo de tercer orden en el interior de la curva, en el punto $z=i$. Se puede aplicar el teorema de Cauchy para las derivadas, con $f(z)=\operatorname{sen} z$, y por tanto $f''(z)=-\operatorname{sen} z$, por lo que resulta:



$$\oint_{|z|=2}\frac{\operatorname{sen} z\,dz}{(z-i)^3}=\frac{2\pi i}{2!}f''(i)=-\pi i\operatorname{sen} i=-\pi i\frac{e^{ii}-e^{-ii}}{2i}=\frac{\pi}{2}\left(e-\frac{1}{e}\right)$$

(b) La función subintegral es par, por lo que podemos calcular la integral sobre el intervalo $(-\infty,+\infty)$, para lo que usamos la curva γ formada por el segmento $[-R,+R]$ y la semicircunferencia superior de centro el origen y radio *R*, δ_R, es decir $\gamma=[-R,+R]\cup\delta_R$. Hay dos polos interiores al recinto: $e^{\frac{\pi}{4}i}$, $e^{\frac{3\pi}{4}i}$:



$\int_0^{\infty}\frac{dx}{1+x^4}=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^4}=\frac{1}{2}I$. Para hallar *I* integramos en el recinto de la

figura y tomamos límites cuando R tiende a infinito:

$$\int_{\gamma}\frac{dz}{1+z^4}=\int_{-R}^{+R}\frac{dz}{1+z^4}+\int_{\delta_R}\frac{dz}{1+z^4}$$

Por el Lema 1 de Jordan $\int_{\delta_R}\frac{dz}{1+z^4}\xrightarrow{R\to\infty}0$, y como $\int_{-R}^{+R}\frac{dz}{1+z^4}\xrightarrow{R\to\infty}I$, por el teorema de los Residuos resulta:

$I=2\pi i\left(\mathrm{Res}\left(f,a\right)+\mathrm{Res}\left(f,b\right)\right)$, siendo $a=e^{\frac{\pi}{4}i}$, $b=e^{\frac{3\pi}{4}i}$

Como

$$\mathrm{Res}\left(f,e^{\frac{\pi}{4}i}\right)=\lim_{z\to e^{\frac{\pi}{4}i}}\left(z-e^{\frac{\pi}{4}i}\right)\frac{1}{1+z^4}=\left(\text{por L'Hopital}\right)=$$

$$=\lim_{z\to e^{\frac{\pi}{4}i}}\frac{1}{4z^3}=\lim_{z\to e^{\frac{\pi}{4}i}}\frac{z}{4z^4}=-\frac{e^{\frac{\pi}{4}i}}{4},\ \text{y}\ \mathrm{Res}\left(f,e^{\frac{3\pi}{4}i}\right)=-\frac{e^{\frac{3\pi}{4}i}}{4}$$

Se tiene $I=2\pi i\left(-\frac{e^{\frac{\pi}{4}i}}{4}-\frac{e^{\frac{3\pi}{4}i}}{4}\right)=-\frac{\pi}{2}i2\,\mathrm{Im}\left(e^{\frac{\pi}{4}i}\right)=-\pi i\frac{\sqrt{2}}{2}i=\pi\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Y finalmente la integral pedida resulta: $\int_0^{\infty}\frac{dx}{1+x^4}=\frac{1}{2}I=\frac{\pi\sqrt{2}}{4}$

(1.5 p.) **5** (a) Calcular la transformada Z de la señal de tiempo discreto

$$x[n]=\begin{cases}2^{-n} & \text{si } 0\le n\le N\\ 0 & \text{en otro caso}\end{cases}$$

Dar la región de convergencia y hallar los ceros y los polos de la transformada.

Solución:

Por la definición de transformada Z se tiene:

$$X\left(z\right)=\sum_{-\infty}^{\infty}x[n]z^{-n}=\sum_{n=0}^{N}2^{-n}z^{-n}=\sum_{n=0}^{N}\left(\frac{1}{2z}\right)^n=\frac{1-\left(\frac{1}{2z}\right)^{N+1}}{1-\frac{1}{2z}}.$$

De donde $X\left(z\right)=\frac{1-\left(\frac{1}{2z}\right)^{N+1}}{1-\frac{1}{2z}}=\frac{\left(2z\right)^{N+1}-1}{\left(2z-1\right)}\frac{2z}{\left(2z\right)^{N+1}}=\frac{\left(2z\right)^{N+1}-1}{\left(2z-1\right)\left(2z\right)^{N}}$.

Por tanto para $z=0$, $X\left(z\right)$ tiene un polo de orden N.

Los ceros del numerador son las raíces de orden N+1 de 1 divididas por 2, pero una de ellas, el valor $z=\frac{1}{2}$, es raíz también del denominador, por lo que en ese valor se tiene una singularidad evitable. Por tanto la Región de Convergencia de $X\left(z\right)$ es $\mathbb{C}-\left\{\left(0,0\right)\right\}$ □