SOLUCIONES

1 Resolver el problema de valor inicial $xz_x + xyz_y = z^2$ con $z = 1$ sobre la curva inicial $y = x^2$.

El sistema asociado a la EDP es el siguiente: $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{xy} = \frac{dz}{z^2}$. De $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{xy}$ se deduce que $x = \ln y + C$, luego $u_1 = -x + \ln y$ es una primera integral del campo. De $\frac{dx}{x} = \frac{dz}{z^2}$ se deduce que $\ln x = -\frac{1}{z} + C$, luego $u_2 = \ln x + \frac{1}{z}$ es otra primera integral del campo. Se puede comprobar (aunque no hace falta, porque no lo pide el problema) que son funcionalmente independientes.
Para hallar la solución del problema de valor inicial, se elimina el parámetro t del sistema:
$\left.\begin{cases} u_1 = -t + \ln t^2 \\ u_2 = \ln t + 1 \end{cases}\right\} \Rightarrow t = e^{u_2 - 1} \Rightarrow u_1 = -e^{u_2 - 1} + 2(u_2 - 1)$. Y por tanto la solución, en forma implícita resulta: $\boxed{-x + \ln y = -xe^{\frac{1}{z} - 1} + 2\left(\ln x + \frac{1}{z} - 1\right)}$. ○

2 Resuélvase por el método de separación de variables el siguiente problema: $u_t = u_{xx} - \cos x,\ 0 < x < \pi;\ t > 0$, con condiciones de contorno Newmann nulas y condición inicial: $u(x,0) = -3\cos 4x;\ 0 < x < \pi$.

El estudio del problema homogéneo asociado $u_t = u_{xx},\ 0 < x < 1;\ t > 0$ junto con las condiciones de contorno Dirichlet nulas nos lleva a una solución del tipo $\boxed{u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t)\cos nx}$ (*). Para hallar $T_n(t)$ imponemos la EDP inicial y la condición inicial. Es decir:
$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty}\left[T_n'(t) + n^2\pi^2 T_n(t)\right]\cos nx = -\cos x}$ (de sustituir (*) en la EDP inicial). De donde, igualando coeficientes en ambos desarrollos de Fourier se tiene:

(**) $\boxed{T_n'(t) + n^2\pi^2 T_n(t) = \begin{cases} -1, & n = 1 \\ 0, & n \neq 1 \end{cases}}$. Además $\boxed{u(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(0)\cos nx = -3\cos 4x}$, de donde

(***) $\boxed{T_n(0) = \begin{cases} -3, & n = 4 \\ 0, & n \neq 4 \end{cases}}$. Resolviendo (**) con las condiciones (***) se obtiene la solución:

$$\boxed{u(x,t) = \left(-1 + e^{-t}\right)\cos x - 3e^{-16t}\cos 4x}$$ ○

3 Clasificar las singularidades de las funciones:

a) $g(z)=\dfrac{1+\cos z}{z-\pi}$

Es claro que $z=\pi$ es un cero simple del denominador. Como también es cero del denominador, en ese punto la función tiene una singularidad evitable. Por otro lado, como el numerador es una función entera, no hay más singularidades. O

b) $h(z)=e^{\left(z+\frac{1}{z}\right)}$

La función se puede escribir como $h(z)=e^{z}\cdot e^{\frac{1}{z}}$. La función e^{z} es entera, y $e^{\frac{1}{z}}$ tiene una singularidad esencial en el origen. Por tanto la función dada tiene una singularidad esencial en el origen. Para $z\neq 0$, la función es holomorfa. O

---

4 Calcular las siguientes integrales mediante integración en el plano complejo:

a) $\displaystyle\int_{|z|=1}\frac{z^2}{\cos^2 z\,\operatorname{sen}^3 z}=dz=I$

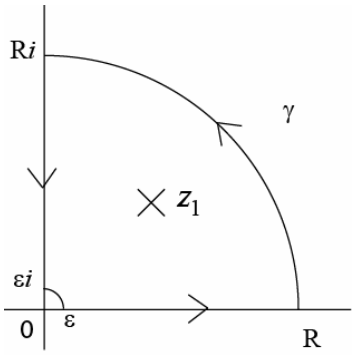
La función subintegral tiene un cero triple en $z=0$ que es cero doble del numerador. Los otros ceros del denominador están fuera del recinto de integración, por tanto

$I=2\pi i\cdot \operatorname{Res}(0)=2\pi i$. O

---

b) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\sqrt{x}}{x^4+1}dx=I$

La integral pedida es del tipo IV. Aunque se puede aplicar el recinto de integración típico de estas integrales, también se puede aplicar el de la figura, que tiene la ventaja de encerrar en su interior sólo un polo: la primera raíz del denominador $z_1=e^{\frac{\pi}{4}i}$.



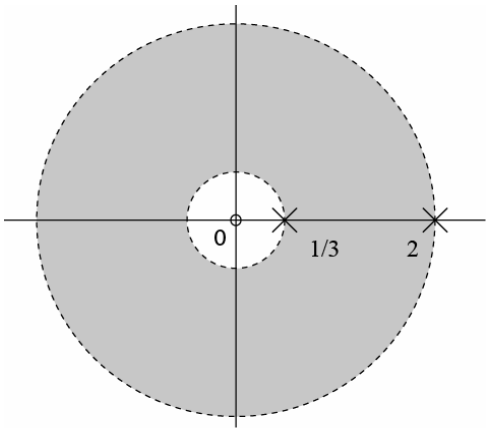
Los lemas 1 y 2 de Jordan aseguran que las integrales sobre los arcos tienden a cero cuando $R\to\infty$ y $\varepsilon\to 0$. Para $z\in[\varepsilon,R]$, la integral tiende a I. Para $z\in[Ri,\varepsilon i]$, se pude poner $z=xe^{\frac{\pi}{2}i}$, y la integral en ese segmento tiende a $-e^{\frac{3\pi}{4}i}\cdot I$. Por otro lado, el teorema de los residuos asegura que:

$$\int_{\gamma}\frac{\sqrt{z}}{z^4+1}dz=2\pi i\operatorname{Res}(f,z_1).$$

$$\left(1-e^{\frac{3\pi}{4}i}\right)I=2\pi i\operatorname{Res}(f,z_1)=2\pi i\lim_{z\to z_1}\frac{(z-z_1)\sqrt{z}}{z^4+1}=2\pi i\lim_{z\to e^{(\pi/4)i}}\frac{z_1\sqrt{z_1}}{-4}=-\frac{\pi i}{2}\cdot e^{\frac{3\pi}{8}i}$$

De donde $\boxed{I=\dfrac{\dfrac{-\pi i\cdot e^{\frac{3\pi}{8}i}}{2}}{1-e^{\frac{3\pi}{4}i}}=\dfrac{\pi/4}{\operatorname{sen}\frac{3\pi}{8}}}$. O

5 Sea $X(z)=\dfrac{5z^{-1}}{(1-2z^{-1})(3-z^{-1})}$ la transformada Z de una señal de tiempo discreto $x[n]$. Dibujar el diagrama de los ceros y polos de $X(z)$, y la ROC si la señal $x[n]$ es bilateral. Hallar finalmente $x[n]$.



El diagrama de ceros ($z=0$) y polos ($z=\dfrac{1}{3}, \quad z=2$) así como la región de convergencia ($\dfrac{1}{3}<|z|<2$) está representada en la figura, pues procede de una señal bilateral.

Para hallar $x[n]$ consideramos $\dfrac{5z^{-1}}{(1-2z^{-1})(3-z^{-1})}=\dfrac{A}{1-2z^{-1}}+\dfrac{B}{3-z^{-1}}$ de donde $A=1$ y $B=-3$. Por tanto: $\boxed{x[n]=-2^n u[-n-1]-\left(\dfrac{1}{3}\right)^n u[n]}$ O

6) Demostrar que la transformada de Fourier de la función de autocorrelación de una señal real $x(t)$, $y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(u)x(t+u)\,du$ es igual al cuadrado del módulo de la transformada de Fourier de $x(t)$, $|X(\omega)|^2$.

Se puede demostrar usando directamente la definición de transformada de Fourier sobre la función de autocorrelación, y teniendo en cuenta que la señal $x(t)$ se deduce el resultado. También escribiendo la función de autocorrelación como una convolución. O