SOLUCIONES

1 Resolver el problema de valor inicial $xz_x + xyz_y = z^2$ con $z = 1$ sobre la curva inicial $y = x^2$.

El sistema asociado a la EDP es el siguiente: $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{xy} = \frac{dz}{z^2}$. De $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{xy}$ se deduce que $x = \ln y + C$, luego $u_1 = -x + \ln y$ es una primera integral del campo. De $\frac{dx}{x} = \frac{dz}{z^2}$ se deduce que $\ln x = -\frac{1}{z} + C$, luego $u_2 = \ln x + \frac{1}{z}$ es otra primera integral del campo. Se puede comprobar (aunque no hace falta, porque no lo pide el problema) que son funcionalmente independientes.
Para hallar la solución del problema de valor inicial, se elimina el parámetro t del sistema:
$\left.\begin{cases} u_1 = -t + \ln t^2 \\ u_2 = \ln t + 1 \end{cases}\right\} \Rightarrow t = e^{u_2 - 1} \Rightarrow u_1 = -e^{u_2 - 1} + 2(u_2 - 1)$. Y por tanto la solución, en forma implícita resulta: $\boxed{-x + \ln y = -xe^{\frac{1}{z} - 1} + 2\left(\ln x + \frac{1}{z} - 1\right)}$. ○

2 Resuélvase por el método de separación de variables el siguiente problema: $u_t = u_{xx} - \operatorname{sen} \pi x,\ 0 < x < 1;\ t > 0$, con condiciones de contorno Dirichlet nulas y condición inicial: $u(x,0) = 2 \operatorname{sen} 4\pi x;\ 0 < x < 1$.

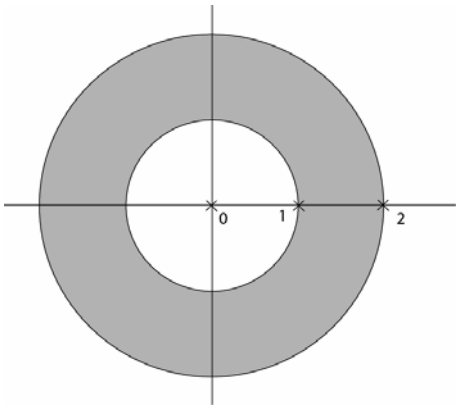
El estudio del problema homogéneo asociado $u_t = u_{xx},\ 0 < x < 1;\ t > 0$ junto con las condiciones de contorno Dirichlet nulas nos lleva a una solución del tipo $\boxed{u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \operatorname{sen} n\pi x}$ (∗). Para hallar $T_n(t)$ imponemos la EDP inicial y la condición inicial. Es decir:
$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \left[T_n'(t) + n^2\pi^2 T_n(t) \right] \operatorname{sen} n\pi x = -\operatorname{sen} \pi x}$ (de sustituir (∗) en la EDP inicial). De donde, igualando coeficientes en ambos desarrollos de Fourier se tiene:

(∗∗) $\boxed{T_n'(t) + n^2\pi^2 T_n(t) = \begin{cases} -1, & n = 1 \\ 0, & n \neq 1 \end{cases}}$. Además $\boxed{u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(0) \operatorname{sen} n\pi x = 2 \operatorname{sen} 4\pi x}$, de donde

(∗∗∗) $\boxed{T_n(0) = \begin{cases} 2, & n = 4 \\ 0, & n \neq 4 \end{cases}}$. Resolviendo (∗∗) con las condiciones (∗∗∗) se obtiene la solución:

$$\boxed{u(x,t) = \frac{1}{\pi^2}\left(-1 + e^{-\pi^2 t}\right) \operatorname{sen} \pi x + 2e^{-16\pi^2 t} \operatorname{sen} 4\pi x}$$ ○

3 **a)** Hallar el desarrollo de Laurent de la función $f(z)=\dfrac{1}{z(z-1)(z-2)}$ en la región $1<|z|<2$.



La región de convergencia donde se pide el desarrollo ($1<|z|<2$) está representada en la figura.

Por tanto el desarrollo será centrado en el origen. Por ello consideramos

$f(z)=\dfrac{1}{z(z-1)(z-2)}$ de la forma

$f(z)=\dfrac{1}{z}\left(\dfrac{A}{z-1}+\dfrac{B}{z-2}\right)$, de donde

$A=-1$ y $B=1$.

Como $1<|z|$, se tiene: $\dfrac{-1}{z-1}=\dfrac{-1/z}{1-1/z}=-1/z\sum_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{1}{z}\right)^n=-\sum_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{1}{z}\right)^{n+1}=-\sum_{n=-\infty}^{-1}z^n$.

Por otro lado, como $|z|<2$, entonces: $\dfrac{1}{z-2}=\dfrac{-1/2}{1-z/2}=-1/2\sum_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{z}{2}\right)^n=-\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{z^n}{2^{n+1}}$.

Por tanto, el desarrollo pedido es: $\boxed{f(z)=\dfrac{1}{z}\left(-\sum_{n=-\infty}^{-1}z^n-\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{z^n}{2^{n+1}}\right)=-\sum_{n=-\infty}^{-2}z^n-\sum_{n=-1}^{\infty}\dfrac{z^n}{2^{n+2}}}$ ○

b) Sea $f(z)$ una función entera tal que $\left|f^{(n)}(0)\right|\le 1$ para todo $n\ge 0$. Demostrar que $|f(z)|\le e^{|z|}$ para todo $z\in\mathbb{C}$.

$f(z)$ entera implica que admite un desarrollo de Taylor en $z=0$ convergente en todo el plano complejo: $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}z^n$. Por tanto, tomando módulos, tenemos:

$|f(z)|=\left|\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}z^n\right|\le\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{\left|f^{(n)}(0)\right|}{n!}|z|^n$ y por la condición del problema

$\boxed{|f(z)|\le\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{\left|f^{(n)}(0)\right|}{n!}|z|^n\le\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{|z|^n}{n!}=e^{|z|}}$. ○

4 Calcular las siguientes integrales mediante integración en el plano complejo:

a) $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{|z|=1}\bar{z}z^{\ell}\bar{z}^{k}\,dz$, según los valores de ℓ y k,

La integral se puede hacer de varias formas. Por ejemplo mediante la definición de integral sobre un camino, usando la parametrización típica de la circunferencia unidad: $|z|=1 \quad \Leftrightarrow \quad z=e^{i\theta}$, con $\theta \in [0,2\pi]$.

Entonces, como $\overline{z}=e^{-i\theta}$ la integral resulta

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1} \bar{z}z^{\ell}\bar{z}^{k}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} e^{-i\theta}e^{i\ell\theta}e^{-ik\theta}\,ie^{i\theta}d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(\ell-k)\theta}d\theta$$

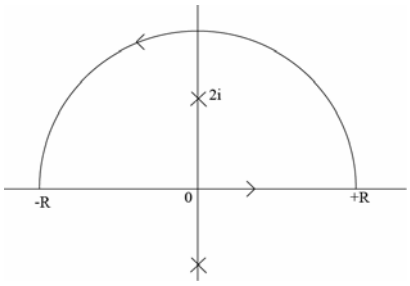
$$z=e^{i\theta} \Rightarrow dz = ie^{i\theta}d\theta$$

De donde la integral vale 1 si $\ell=k$ y 0 en otro caso. O

También se puede multiplicar y dividir por z^{k+1}, considerar que $z\cdot\overline{z}=|z|^2=1$ en nuestro caso y usar el teorema de Cauchy para las derivadas (que es como se hizo en clase). Obteniéndose, lógicamente, el mismo resultado. O

b) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{dx}{\left(x^2+4\right)^2}$.

Como la función subintegral es par, consideramos el recinto de integración de la figura.



Nótese que la función tiene dos polos dobles, uno de ellos interior al recinto. Además la integral en la semicircunferencia tiende a cero cuando el radio tiende a infinito por el Lema 1 de Jordan, mientras la integral en el segmento $[-R,R]$ tiende a dos veces la integral pedida.

Por el teorema de los residuos se tiene:

$$2I = 2\pi i\,\mathrm{Res}\left(f,2i\right) = 2\pi i\lim_{z\to 2i}\left(\frac{\left(z-2i\right)^2}{\left(z^2+4\right)^2}\right)' = 2\pi i\lim_{z\to 2i}\frac{-2}{\left(z+2i\right)^3} = 2\pi i\frac{1}{32i}$$

De donde $\boxed{I=\dfrac{\pi}{32}}$. O

5 Demostrar el teorema de convolución para la transformada de Laplace. Indicar la región de convergencia de la transformada de la convolución.

Basta aplicar la definición de transformada de Laplace a la convolución de dos señales continuas. En cuanto a la región de convergencia de la transformada de la convolución, ésta contiene a la intersección de las regiones de convergencia de las transformadas de las señales, y el contenido puede ser estricto. O

6 Dar el teorema de desplazamiento en el tiempo de la transformada z unilateral. Aplicarlo para resolver el siguiente problema de valor inicial:

$$\begin{aligned} &y[n]-3y[n-1]=x[n] \\ &x[n]=1 \text{ para } n\geq 0 \end{aligned}, \qquad \text{Con condición inicial } y[-1]=2.$$

El teorema de desplazamiento en el tiempo, en su versión más sencilla, de la transformada z unilateral dice que si $y[n]=x[n-1]$, entonces $Y(z)=x[-1]+z^{-1}X(z)$. Aplicando la transformada z unilateral a ambos lados de la ecuación en diferencias se obtiene:

$Y(z)-3\left(2+z^{-1}Y(z)\right)=\dfrac{1}{1-z^{-1}}$, pues la transformada z unilateral de $x[n]=u[n]$ es $\dfrac{1}{1-z^{-1}}$.

Despejando $Y(z)$ se tiene $Y(z)=\dfrac{1}{\left(1-3z^{-1}\right)\left(1-z^{-1}\right)}+\dfrac{6}{1-z^{-1}}$, que tras descomponer en fracciones simples resulta: $Y(z)=\dfrac{15/2}{1-3z^{-1}}-\dfrac{1/2}{1-z^{-1}}$. De donde, hallando la transformada inversa se obtiene $\boxed{y[n]=\dfrac{15}{2}\cdot 3^{n}-\dfrac{1}{2}}$. ○