ANÁLISIS DE FOURIER II – TRANSFORMADA DE FOURIER

Def: Sea f una función -real o compleja-. Se llama INTEGRAL DE FOURIER o TRANSFORMADA DE FOURIER de la función f, a la función F, definida así:

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cdot e^{-j\omega t}dt=\mathfrak{F}[f(t)]$$

Def: Se llama TRANSFORMADA INVERSA DE FOURIER de la función F a la función f, definida así:

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)\cdot e^{j\omega t}d\omega=\mathfrak{F}^{-1}[F(\omega)]$$

OBSERVACIÓN: Es condición SUFICIENTE para que exista la $\mathfrak{F}[f]$ el que $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|dt<+\infty$. Esto se puede expresar diciendo que $f\in L^1(R)$.

Propiedad: (Identidad de Fourier) Se verifica:

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(s)\cdot e^{-j\omega s}ds\right]\cdot e^{j\omega t}d\omega=\mathfrak{F}^{-1}[F(\omega)]$$

es decir,

$$f(t)=\mathfrak{F}^{-1}[\mathfrak{F}(f(t))]$$

Teorema integral de Fourier: Si f es una función real, entonces:

$$f(t)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(s)\cdot\cos\omega(t-s)ds\right]d\omega$$

Demostración:
Por la identidad de Fourier se tiene

$f(t)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(s)\cdot e^{j\omega(t-s)}ds\cdot d\omega$, pero si f es una función real, entonces:

$f(t)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(s)\cdot\cos\omega(t-s)ds\cdot d\omega$, pero puesto que $\cos\omega(t-s)$ es par respecto de ω:

$f(t)=\dfrac{2}{2\pi}\displaystyle\int_{0}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(s)\cdot\cos\omega(t-s)ds\cdot d\omega$. ■

OBSERVACIÓN: La demostración anterior supone que la función f es una función continua. En el supuesto de ser f una función continua a trozos, con derivada continua a trozos y *absolutamente integrable*, tendríamos la igualdad siguiente:

$$\frac{f(t+0)-f(t-0)}{2}=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(s)\cdot\cos\omega(t-s)ds\cdot d\omega$$

donde $f(t+0)=\lim_{\varepsilon\to 0^+} f(t+\varepsilon)$ y $f(t-0)=\lim_{\varepsilon\to 0^+} f(t-\varepsilon)$.

Propiedades:

① f una función real si y sólo si $F(-\omega)=\overline{F(\omega)}$.

② Si f es una función real, probar que su espectro de magnitud es una función par y su espectro de fase es impar.

③ Si f es una función real y $F(\omega)=\mathfrak{F}[f(t)]$ entonces:

a) Si $F(\omega)$ es real, entonces $f(t)$ es una función par.

b) Si $F(\omega)$ es imaginaria pura, entonces $f(t)$ es una función impar.

④ Si f es una función real y $\mathfrak{F}[f]=R(\omega)+jIm(\omega)$ entonces: $\mathfrak{F}[f_p]=R(\omega)$ y $\mathfrak{F}[f_i]=jIm(\omega)$,

siendo $f_p(t)=\dfrac{f(t)+f(-t)}{2}$ y $f_i(t)=\dfrac{f(t)-f(-t)}{2}$.

PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER:

① LINEALIDAD O PRINCIPIO DE SUPERPOSICIÓN:

$$\mathfrak{F}[a_1x_1(t)+a_2x_2(t)]=a_1X_1(\omega)+a_2X_2(\omega).$$

② ESCALAMIENTO EN EL TIEMPO:

$$\mathfrak{F}[x(at)]=\frac{1}{|a|}X\left(\frac{\omega}{a}\right).$$

③ DUALIDAD:

$$\mathfrak{F}[x(-t)]=X(-\omega).$$

④ DESPLAZAMIENTO EN EL TIEMPO:

$$\mathfrak{F}[x(t-t_0)]=X(\omega)\cdot e^{-j\omega t_0}.$$

④ DESPLAZAMIENTO EN LA FRECUENCIA:

$$\mathfrak{F}[x(t)\cdot e^{j\omega_0 t}]=X(\omega-\omega_0).$$

⑤ SIMETRÍA:

$$\mathfrak{F}[X(t)]=2\pi\cdot x(-\omega).$$

TRANSFORMADAS SENO Y COSENO DE FOURIER

Def: Sea f una función -real o compleja-. Se llama TRANSFORMADA COSENO DE FOURIER de la función f, a la función:

$$F_c(\omega) = \Im_c[f(t)] = \int_0^{+\infty} f(t) \cdot \cos\omega t dt$$

Teorema de Inversión: Se verifica: $f(t) = \Im_c^{-1}[F_c] = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} F_c(\omega) \cdot \cos\omega t\, d\omega$.

Demostración:

Supongamos f una función real y definida para $t > 0$. Entonces se puede extender de forma PAR a toda la recta real considerando:

$$f_+(t) = \begin{cases} f(-t) \text{ si } t < 0 \\ f(t) \text{ si } t > 0 \end{cases}$$

Entonces: $F(\omega) = \Im[f_+(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f_+(t) \cdot e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{0} f(-t) \cdot e^{-j\omega t} dt + \int_0^{+\infty} f(t) \cdot e^{-j\omega t} dt =$

$= \int_0^{+\infty} f(t) \cdot e^{j\omega t} + f(t) \cdot e^{-j\omega t} dt = 2\int_0^{+\infty} f(t) \cdot \cos\omega t\, dt$. Ahora utilizando la identidad de Fourier:

$$f(t) = f_+(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(s) \cdot e^{-j\omega s} ds\right] \cdot e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[2\int_0^{+\infty} f(s) \cdot \cos\omega s ds\right] \cdot e^{j\omega t} d\omega =$$

e igual que antes se obtiene:

$$f(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\left[\int_0^{+\infty} f(s) \cdot \cos\omega s ds\right] \cdot \cos\omega s d\omega. \qquad \blacksquare$$

Def: Sea f una función -real o compleja-. Se llama TRANSFORMADA SENO DE FOURIER de la función f, a la función:

$$F_s(\omega) = \Im_s[f(t)] = \int_0^{+\infty} f(t) \cdot sen\omega t\, dt$$

Se verifica: $f(t) = \Im_s^{-1}[F_s] = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} F_s(\omega) \cdot sen\omega t\, d\omega$. (Teorema de Inversión).

Propiedad: Sea $f \in \mathcal{C}^2[0,+\infty)$ es decir con 2ª derivada continua, y supongamos f y f' absolutamente integrables, entonces: $\mathfrak{F}_c[f'(t)] = -f(0) + \omega\mathfrak{F}_s[f]$.

Demostración: (integrando por partes)

$$\mathfrak{F}_c[f'(t)] = \int_0^{+\infty} f'(t)\cdot \cos\omega t\, dt = [f(t)\cdot\cos\omega t]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} f(t)\cdot\omega\cdot sen\,\omega t\, dt = -f(0) + \omega\mathfrak{F}_s[f] \quad \blacksquare$$

La transformada de Fourier y la derivada:

Sea f continua en R, ¿se pueden relacionar la transformada de Fourier de f con la de su derivada?

$$\mathfrak{F}[f'(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(t)\cdot e^{-j\omega t} dt = f(t)\cdot e^{-j\omega t}\Big]_{-\infty}^{+\infty} + j\omega\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cdot e^{-j\omega t} dt$$

donde para que exista la última integral imponemos que f sea absolutamente integrable:

$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt < +\infty$, lo cual implica que $\lim_{|t|\to\infty} f(t) = 0$. Por tanto, en ese caso:

$$\mathfrak{F}[f'(t)] = j\omega\cdot\mathfrak{F}[f(t)].$$

Es decir la transformada transforma la derivada en el producto por $j\omega$.

En general, bajo suficientes condiciones de diferenciabilidad se tiene la expresión:

$$\mathfrak{F}[f^{n)}(t)] = (j\omega)^n\cdot\mathfrak{F}[f(t)].$$

CONVOLUCIÓN

Def: Sean f_1 y f_2 dos funciones. La convolución de f_1 y f_2 es otra función definida por la expresión:

$$f_1 * f_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(s)\cdot f_2(t-s) ds$$

Se comprueba que la convolución tiene las propiedades formales de un producto ordinario.

PROPIEDADES DE LA CONVOLUCIÓN:

① SIMÉTRICA: $f_1 * f_2 = f_2 * f_1$.

② $f_1 * (\alpha f_2) = \alpha(f_1 * f_2)$.

③ ASOCIATIVA: $f * (g * h) = (f * g) * h$.

Teorema de Convolución en el tiempo:

Si $X_1(\omega) = \mathfrak{F}[x_1(t)]$ y $X_2(\omega) = \mathfrak{F}[x_2(t)]$, entonces: $\mathfrak{F}[x_1(t) * x_2(t)] = X_1(\omega)\cdot X_2(\omega)$.

Así mediante la transformada de Fourier, un producto de convolución en el tiempo se convierte en un producto ordinario en la frecuencia.

Teorema de Convolución en la frecuencia:

Si $x_1(t) = \mathfrak{F}^{-1}[X_1(\omega)]$ y $x_2(t) = \mathfrak{F}^{-1}[X_2(\omega)]$, entonces: $\mathfrak{F}^{-1}[X_1(\omega) * X_2(\omega)] = 2\pi\cdot x_1(t)\cdot x_2(t)$.

Teorema de Parseval y Espectro de energía:

Si $X(\omega) = \mathfrak{F}[x(t)]$ entonces:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |X(\omega)|^2 d\omega .$$

Si se define el contenido de energía, *E*, de una señal $x(t)$ como la primera integral en la ecuación anterior, entonces, si $x(t)$ representa el voltaje de una fuente conectada a través de una resistencia de 1 Ω, entonces la cantidad *E* es igual a la energía total entregada por la fuente. Por el teorema de Parseval,

$E = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |X(\omega)|^2 d\omega$ y a la función $|X(\omega)|^2$ se le llama *espectro de energía* ó función de densidad de energía espectral de $x(t)$.

FUNCIONES DE CORRELACIÓN:

Def: Sean x_1 y x_2 dos funciones. La función de correlación de f_1 y f_2 se define por:

$$R_{12}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t) \cdot x_2(t-\tau) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t+\tau) \cdot x_2(t) dt$$

Análogamente:

$$R_{21}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_2(t) \cdot x_1(t-\tau) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x_2(t+\tau) \cdot x_1(t) dt .$$

La función

$R_{11}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t) \cdot x_1(t-\tau) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t+\tau) \cdot x_1(t) dt$ se llama función de autocorrelación.

OBSERVACIÓN: Las igualdades anteriores se comprueban haciendo un cambio de variable. Las funciones de correlación dan idea de la interdependencia entre las funciones x_1 y x_2. Si $R_{21}(\tau) = 0$ se dice que x_1 y x_2 no están correlacionadas. Se comprueba que $R_{12}(\tau) = R_{21}(-\tau)$ y que $R_{11}(\tau) = R_{11}(-\tau)$.

Teorema de Wiener-Kintchine:

Dada una función real, la transformada de Fourier de su función de autocorrelación coincide con su espectro de energía.

PROBLEMAS:

① Si $F(\omega)=\mathfrak{F}[f(t)]$, hallar que la transformada de Fourier de $f(t)\cdot\cos\omega_0 t$ es

$\frac{1}{2}F(\omega-\omega_0)+\frac{1}{2}F(\omega+\omega_0)$. Encontrar también la transformada de $f(t)\cdot sen\omega_0 t$

② Hallar la transformada de Fourier de la función seno de duración finita *d*. Hacer lo mismo para la función coseno de duración finita *d*.

③ Sabiendo que la transformada de Fourier de $f(t)=e^{-a|t|}$ es la función $F(\omega)=\dfrac{2a}{a^2+\omega^2}$, hallar la transformada de Fourier de $f(t)=\dfrac{1}{a^2+t^2}$.

④ Si f es una función real y $\mathfrak{F}[f]=R(\omega)+jIm(\omega)$ entonces: $\mathfrak{F}[f_p]=R(\omega)$ y $\mathfrak{F}[f_i]=jIm(\omega)$, siendo $f_p(t)=\dfrac{f(t)+f(-t)}{2}$ y $f_i(t)=\dfrac{f(t)-f(-t)}{2}$.

⑤ Probar el teorema de inversión de la transformada seno de Fourier. (Indicación: considérese la extensión impar de f).

⑥ Comprobar que si $f\in\mathcal{C}^2[0,+\infty)$, es decir con 2ª derivada continua, y si f y f' son absolutamente integrables, entonces: $\mathfrak{F}_s[f'(t)]=-\omega\mathfrak{F}_c[f]$.

⑦ Comprobar que si f es *suficientemente regular* y hasta la 2ª derivada absolutamente integrable, entonces: $\mathfrak{F}_c[f''(t)]=-f'(0)-\omega^2\mathfrak{F}_c[f]$; $\mathfrak{F}_s[f''(t)]=\omega\cdot f(0)-\omega^2\mathfrak{F}_s[f]$.

⑧ Comprobar el teorema de convolución en la frecuencia utilizando la propiedad de simetría de la transformada de Fourier.

⑨ Hallar la función de autocorrelación del pulso rectangular. Hallar la función densidad espectral de energía, directamente y a partir de la función de autocorrelación.

⑩ Si $F(\omega)=\mathfrak{F}[f(t)]$, demuéstrese:

a) $|F(\omega)|\le\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|dt$; b) $|F(\omega)|\le\frac{1}{|\omega|}\int_{-\infty}^{+\infty}|f'(t)|dt$; c) $|F(\omega)|\le\frac{1}{\omega^2}\int_{-\infty}^{+\infty}|f''(t)|dt$.

⑪ Si $F(\omega)=\mathfrak{F}[f(t)]$ y $G(\omega)=\mathfrak{F}[g(t)]$, demuéstrese:

a) $\int_{-\infty}^{+\infty}f(s)g(t-s)ds=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)G(\omega)e^{j\omega t}d\omega$;

b) $\int_{-\infty}^{+\infty}f(s)g(-s)ds=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)G(\omega)d\omega$; c) $\int_{-\infty}^{+\infty}f(s)\overline{g(s)}ds=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)\overline{G(\omega)}d\omega$.