LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

Una condición suficiente para la existencia de la transformada de Fourier de una función (ordinaria) es que sea absolutamente integrable, es decir

(1) $$\int_{-\infty}^{+\infty} |f| < \infty$$

Sin embargo esta situación he hecho no se cumple en muchos casos de interés. Por ejemplo una función que aparece con frecuencia es $f(t) = \mathrm{sen}(\omega t)$ con $\omega \in R$. Esta función NO es absolutamente integrable. En muchos problemas físicos, especialmente aquellos en los que los efectos transitorios son de interés tenemos una función de este tipo con la condición adicional $f(t) = 0$ para $t < 0$.

Definición: Se llama transformada de Laplace de una señal (o función) $x(t)$ a:

(2) $$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-st} dt$$

la expresión anterior también se llama transformada bilateral de Laplace, para distinguirla de la transformada unilateral de Laplace, que se define como:

(3) $$X_u(s) = \int_{0^+}^{+\infty} x(t) e^{-st} dt$$

Se suele escribir $s = \sigma + j\omega$, y el par de transformadas de Laplace como $x(t) \longleftrightarrow X(s)$, o bien $X(s) = L[x(t)]$

Si $s = j\omega$. Entonces:

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt = F[x(t)]$$

Sea $s = \sigma + j\omega$. Entonces:

$$L[x(t)] = X(\sigma + j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-\sigma t - j\omega t} dt = F\left[x(t) e^{-\sigma t}\right]$$

Ejemplo:

Sea $x(t) = e^{-at} u(t)$, su transformada de Fourier, $F[x(t)]$ converge para $a > 0$ y es además $F[x(t)] = X(j\omega) = \dfrac{1}{j\omega + a}$ (Compruébese).

Haciendo $s = \sigma + j\omega$, se tiene: $X(s) = L[x(t)] = \dfrac{1}{s + a}$ con $\mathrm{Re}(s) > -a$. Es decir la región de convergencia es un semiplano del plano complejo.s.

Ejemplo:

Si $x(t) = -e^{-at} u(-t)$, $X(s) = L[x(t)] = \dfrac{1}{s + a}$ con $\mathrm{Re}(s) < -a$. Nótese que aunque la función transformada es la misma que antes, su región de convergencia es totalmente distinta.

Ejemplo:

Comproblar que si $x(t) = e^{-t}u(t) + e^{-2t}u(t)$, $X(s) = \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+2}$ con $\mathrm{Re}(s) > -1$. Nótese que la región de convergencia está limitada por un polo de la función.

PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

1. La región de convergencia de $X(s)$ consiste en franjas paralelas al eje jw del plano s. La razón es que $X(s)$ converge para aquellos valores de s para los que la transformada de Fourier de la señal $x(t)\cdot e^{\sigma t}$ converge, y por tanto la convergencia de la transformada de Laplace depende sólo de la parte real de s, $\mathrm{Re}(s) = \mathrm{Re}(\sigma + j\omega) = \sigma$
2. La región de convergencia de la transformada de Laplace de funciones racionales no contiene polos.
3. Si $x(t)$ es de duración finita, y hay al menos un punto es el que $X(s)$ es convergente, entonces, su región de convergencia es todo el plano s.
4. Si $x(t)$ es una señal a derechas y si la receta $\mathrm{Re}(s) = \sigma_0$ está en la ROC, entonces para todo s con $\mathrm{Re}(s) > \sigma_0,\ s \in ROC$.
5. Si $x(t)$ es una señal a izquierdas y si la receta $\mathrm{Re}(s) = \sigma_0$ está en la ROC, entonces para todo s con $\mathrm{Re}(s) < \sigma_0,\ s \in ROC$.

Definición (Transformada inversa de Laplace):

Sea $x(t)$ es una señal con transformada de Laplace $X(s)$. Entonces

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} X(s)e^{st}ds \tag{4}$$

PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

1. Linealidad: Si $X_1(s) = L[x_1(t)]$ con ROC=R1 y $X_2(s) = L[x_2(t)]$ con ROC=R2, entonces $L[a_1x_1(t) + a_2x_2(t)] = a_1X_1(s) + a_2X_2(s)$, con ROC=R $\supset$ R1$\cap$R2

El contenido puede ser estricto como pone de manifiesto el siguiente ejemplo:

Ejemplo: $X_1(s) = \frac{1}{s+1}$, con $ROC = R1 = \{\mathrm{Re}(s) > -1\}$, $X_2(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$, con $ROC = R2 = \{\mathrm{Re}(s) > -1\}$, y sin embargo, $X(s) = X_1(s) - X_2(s) = \frac{1}{s+2}$ con $ROC = R = \{\mathrm{Re}(s) > -2\} \supset R1 \cap R2$.

2. Desplazamiento en el tiempo: Si $X(s)=L\left[x(t)\right]$ con ROC=R, entonces $L\left[x(t-t_0)\right]=e^{-st_0}X(s)$, con ROC=R.

3. Desplazamiento en el dominio s: Si $X(s)=L\left[x(t)\right]$, entonces $L\left[e^{s_0 t}x(t)\right]=X(s-s_0)$, con ROC=R+Re$(s_0)$.

4. Escalamiento en el tiempo: Si Si $X(s)=L\left[x(t)\right]$, entonces $L\left[x(at)\right]=\frac{1}{|a|}X\left(\frac{s}{a}\right)$ con ROC= R$/a$.

5. Convolución: Si $X_1(s)=L\left[x_1(t)\right]$ con ROC=R1 y $X_2(s)=L\left[x_2(t)\right]$ con ROC=R2, entonces $L\left[x_1(t)*x_2(t)\right]=X_1(s)\cdot X_2(s)$ con ROC=R $\supset$ R1$\cap$R2.

El contenido puede ser estricto como pone de manifiesto el siguiente ejemplo:

Ejemplo: $X_1(s)=\dfrac{s+1}{s+2}$, con $ROC=R1=\left\{\mathrm{Re}(s)>-2\right\}$, $X_2(s)=\dfrac{s+2}{s+1}$, con $ROC=R2=\left\{\mathrm{Re}(s)>-1\right\}$, y sin embargo, $X_1(s)\cdot X_2(s)=1$ con $ROC=\mathbb{C}$.

6. Diferenciación en el tiempo: Si $X(s)=L\left[x(t)\right]$, entonces

$L\left[\dfrac{dx(t)}{dt}\right]=sX(s)$ con ROC conteniendo a R.

7. Diferenciación en el dominio s: Si $X(s)=L\left[x(t)\right]$, entonces

$L\left[-tx(t)\right]=\dfrac{dX(s)}{dt}$ con ROC = R.

8. Integración en le dominio del tiempo: Si $X(s)=L\left[x(t)\right]$, entonces

$L\left[\int_{-\infty}^{t}x(\tau)\,d\tau\right]=\dfrac{1}{s}X(s)$, con ROC conteniendo a $R\cap\left\{\mathrm{Re}(s)>0\right\}$