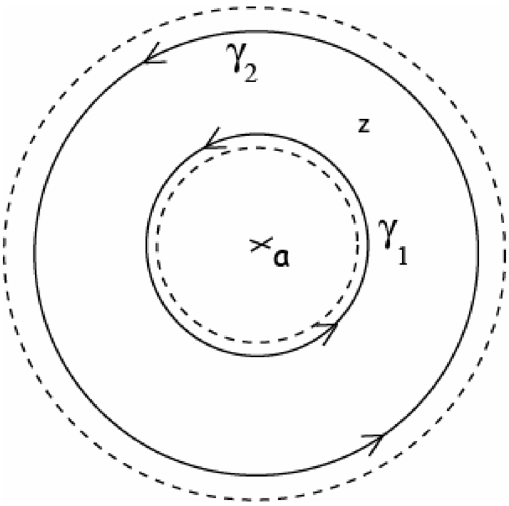
Teorema de Laurent: Sea *f* una función analítica en la corona circular centrada en el punto *a*, $r < |z-a| < R$. Entonces puede desarrollarse de forma única en una serie de Laurent:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n, \text{ con } c_n \in \mathbb{C} \text{ y } z \in \mathbb{C}$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-a|=\rho} \frac{f(w)\,dw}{(w-a)^{n+1}}$$

Dem:

Consideremos dos círculos $\gamma_1 : |z-a| = r+\varepsilon;\ \gamma_2 : |z-a| = R-\varepsilon$ como en la figura:



y el ciclo $\Gamma = \gamma_2 \cup (-\gamma_1)$. Entonces, integrando en ese ciclo, por la fórmula integral de Cauchy, para todo *z* entre esos dos Círculos se tiene:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\left(\int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{(w-z)}\,dw - \int_{\gamma_1} \frac{f(w)}{(w-z)}\,dw \right)$$

Para la primera integral, como

$$\frac{1}{w-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z-a)^n}{(w-a)^{n+1}}$$

se tiene

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2}\frac{f(w)}{(w-a)}\,dw = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-a)^n$$

$$\boxed{c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2}\frac{f(w)\,dw}{(w-a)^{n+1}}}$$

Para la segunda integral, como

$$\frac{-1}{w-z} = \frac{1}{(z-a)-(w-a)} = \frac{1}{(z-a)}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{w-a}{z-a}\right)^n$$

que es convergente por ser $|w-a| < |z-a|$ para w en γ_1, se tiene

$$\frac{-1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{f(w)}{(w-z)}\,dw = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_{\gamma_1} f(w)(w-a)^n\,dw\right)\frac{1}{(z-a)^{n+1}} = \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z-a)^n$$

$$\boxed{c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{f(w)\,dw}{(w-a)^{n+1}}}$$

Estas fórmulas son válidas para cualquier círculo contenido en la corona circular inicial, de ecuación $|w-a| = \rho$, con $r < \rho < R$ por ser la función subintegral que define los coeficientes c_n analítica en la corona circular de radios r y R.