OBSERVACIÓN: Los coeficientes de la serie de potencias asociada a una función analítica son únicos.

Teorema: Sea $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ una serie de potencias con radio de convergencia $\rho > 0$. Entonces la función $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ es analítica en $B(a,\rho)$.

Definición: Un conjunto Ω es **conexo** si NO se puede poner como unión de dos abiertos disjuntos.
De forma equivalente,
Un conjunto Ω es **conexo** si NO existe un subconjunto no vacio de Ω abierto y cerrado.

Primer Teorema de identidad: Sea Ω un abierto conexo y $f \in A(\Omega)$. Entonces son equivalentes:
1) f es idénticamente nula Ω.
2) Existe un abierto no vacío $\Omega' \subset \Omega$, tal que f es idénticamente nula Ω'.
3) Existe un punto $z_0 \in \Omega$, tal que $f^{n)}(z_0) = 0, \ \forall n \in N$.

Demostración:
1) $\Rightarrow$ 2) es trivial.
2) $\Rightarrow$ 3): Sea $z_0 \in \Omega'$. Ω' abierto $\Rightarrow \exists\, r' > 0 \ / \ B(z_0, r') \subset \Omega'$.

$$f \in A(\Omega) \Rightarrow \exists\, r > 0 \ / \ f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n \quad \forall z \in B(z_0, r).$$

Sea $r'' = min(r, r')$, entonces $0 = f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$ y como también

$0 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{0}{n!}(z-z_0)^n$ y el desarrollo de una función analítica es único, $f^{n)}(z_0) = 0, \quad \forall n \in N$.

3) $\Rightarrow$ 1): Consideremos el conjunto $S = \{ z \in \Omega \ / \ f^{n)}(z) = 0, \quad \forall n \in N \}$.
$S \neq \emptyset$ pues por hipótesis $z_0 \in S$.
S es cerrado pues $S = \bigcap_{n \in N} f^{n)^{-1}}(0)$ -por ser intersección de cerrados-.
S es abierto:

Sea $$\left.\begin{array}{l} \omega \in S \Rightarrow f^{n)}(\omega) = 0 \ \ \forall n \in N \\ f \text{ analítica en } \omega \end{array}\right\} \Rightarrow \exists\, r > 0 \ / \ f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{0}{n!}(z-\omega)^n \quad \forall z \in B(\omega, r)$$

y por tanto $B(\omega, r) \subset S$.
Como Ω es conexo se tiene $S = \Omega$. ∎

Corolario: Si $f, g \in A(\Omega), \quad \Omega$ conexo y ambas coinciden en un abierto no vacío de Ω, entonces coinciden en todo Ω.

Segundo Teorema de identidad: Sea Ω un abierto conexo y $f \in \mathrm{A}(\Omega)$, $a \in \Omega$ y $\{z_k\}$ una sucesión de puntos de Ω tal que:

1) La sucesión converge a a,
2) $z_k \neq a \quad \forall k \in N$,
3) $f(z_k) = 0, \ \forall k \in N$.

Entonces f es idénticamente nula Ω.

Demostración:

Sea $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ con $z \in B(a,r) \subset \Omega$. Queremos probar que todos los coeficientes son nulos. Supongamos que alguno es no nulo y sea *m* el menor número natural tal que $c_m \neq 0$. Entonces:

$$f(z) = (z-a)^m \sum_{n=0}^{\infty} c_{m+n}(z-a)^n = (z-a)^m \cdot g(z)$$

$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{m+n}(z-a)^n$ es continua en $B(a,r)$. Como $g(z_k) = 0$ por ser $z_k \neq a \quad \forall k \in N$ y $z_k \to a$ se tiene $g(a) = 0$, es decir $c_m = 0$. Contradicción.

Por el teorema anterior se tiene el resultado. n

Definición: Sea Ω es **conexo,** $f \in \mathrm{A}(\Omega)$ no es constante en Ω y $z_0 \in \Omega$ un cero de *f*, es decir $f(z_0) = 0$. Se llama ORDEN del cero al menor entero positivo para el que $f^{m)}(z_0) \neq 0$.

Teorema: Los ceros de una función analítica no constante son puntos aislados.

EJEMPLO: La función $f(z) = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{z}\right)$ no es analítica en $z = 0$.

La razón es que existe una sucesión de ceros de *f* que converge a 0.