Problemas Resueltos sobre Límites y Continuidad

Repaso de Problemas típicos

1 $$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{x-2}$$

2 $$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+x^2+x+1}{x^3+3x^2+5x+2}$$

3 $$\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}$$

4 $$\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x-1}$$

5 $$\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\sqrt{2x^2+x+1}-\sqrt{x^2-3x+1}}$$

6 $$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(3x)}{6x}$$

7 $$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(\operatorname{sen}(x))}{x}$$

8 $$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x^2)}{x\operatorname{sen}(x)}$$

9 $$\lim_{x\to 0}\frac{x+2\operatorname{sen}(x)}{\sqrt{x^2+2\operatorname{sen}(x)+1}-\sqrt{\operatorname{sen}^2(x)-x+1}}$$

10 $$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} e^{\operatorname{tg}(x)}$$

Calculators

Repaso de Problemas

11 ¿Dónde es $y = \operatorname{tg}(x)$ continua?

12 ¿Dónde es continua $f(\phi) = \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{\phi^2 - 1}\right)$?

13 ¿Qué ha de valer $f(0)$ para que la función $f(x) = \dfrac{x^2 - x}{x - 1}$, $x \neq 0$, sea continua en $x = 0$?

14 Determinar las discontinuidades evitables de las siguientes funciones en los puntos indicados:

a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 8}{x + 2}$, $x_0 = -2$, b) $g(x) = \dfrac{x - 1}{|x - 1|}$, $x_0 = 1$

c) $h(t) = t\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{t}\right)$, $t_0 = 0$

15 Demostrar que la ecuación $\operatorname{sen}(x) = e^x$ tiene ∞ solutiones.

Calculators

Métodos para el cálculo de Límites

1 Casos de indenterminación:

$$0^0, \frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, 0\infty, \infty^0, 1^\infty.$$

2 Aritmética del ∞ :

$$\frac{a}{\infty} = 0, \frac{\infty}{\text{número positivo}} = \infty, \infty \times (\text{númbero negativo}) = -\infty.$$

3 Si la función, de la que se está calculando el límite, está definida por una expresión algebraica que toma un valor finito en el punto límite, ese valor es el límite buscado.

4 Si la función, de la que se está calculando el límite, no se puede evaluar en el punto límite (p.e. porque aparece una indeterminación (1)), entonces re-escribir la función en forma que se pueda calcular el límite.

Calculators

Simplificaciones y Métodos

1 Factorizar ó simplificar: $(a+b)(a-b)=a^2-b^2.$

2 Eliminar factores comunes en functiones racionales:

$$\frac{x^2-1}{x-1}=\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=x+1\xrightarrow[x\to 1]{}2.$$

3 Si aparece una raíz cuadrada, multiplicar y dividir por la expresión conjugada:

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{x-2}=\frac{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x+2}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-2}\right)}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-2}}$$

$$=\frac{(x+1)-(x-2)}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-2}}=\frac{3}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}}\xrightarrow[x\to\infty]{}0$$

4 Usar el hecho: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{sen}(x)}{x}=1.$

Calculators

Continuidad de Funciones

1

Si las funciones son contínuas (p.e. definidas por expresiones elementales de polinomios, funciones racionales, trigonométricas, exponenciales o sus inversas) el límite se calcula sustituyendo el punto al que tiende la variable independiente.

2

Si la función f es continua en el punto $x = a$ entonces:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Se utiliza para demostrar que una ecuación tiene solución.

3

Ejemplos de funciones no continuas en $x = 0$:

$$f(x) = \frac{1}{x}, g(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right), h(x) = \frac{x}{|x|}.$$

4

Teorema del Valor Medio para Functiones Continuas

Si f es continua, $f(a) < 0$ y $f(b) > 0$, entonces hay un punto c entre a y b tal que $f(c) = 0$.

Calculators

Límites: factorizar y simplificar:

Problema 1 $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x - 2}$

Solución Re-escribir $\dfrac{x^2 - 3x + 2}{x - 2} = \dfrac{(x-1)(x-2)}{x-2} = x - 1.$

Por tanto $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x - 2} = \lim_{x \to 2}(x-1) = 1.$

Calculators

Límites elementales

Problema 2 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3+x^2+x+1}{x^3+3x^2+5x+2}$

Solución

$$\frac{x^3+x^2+x+1}{x^3+3x^2+5x+2} = \frac{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}}{1+\dfrac{3}{x}+\dfrac{5}{x^2}+\dfrac{2}{x^3}} \xrightarrow[x\to\infty]{} 1.$$

- Lo haremos más directo: sin más que considerar los términos de mayor grado, o más aún, igualando al cociente de los coeficientes principales.

Problema 2 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3+x^2+x+1}{x^3+3x^2+5x+2} = \dfrac{1}{1} = 1$

Límites: expresión conjugada

Problema 3 $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}$

Solución Re-escribimos

$$\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}=\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}\right)}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}$$

$$=\frac{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2-\left(\sqrt{x^2-1}\right)^2}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}=\frac{\left(x^2+1\right)-\left(x^2-1\right)}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}=\frac{2}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}$$

Por tanto $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}=0.$

Calculators

Límites

Problema 4

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x-1}$$

Solución Re-escribimos

$$\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x-1}=$$

$$\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x-1}\right)\frac{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x-1}}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x-1}}$$

$$=\frac{\left(x^2+x+1\right)-\left(x^2-x-1\right)}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x-1}}=\frac{2x+2}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x-1}}$$

$$\simeq\frac{2x}{\sqrt{x^2}+\sqrt{x^2}}\xrightarrow[x\to\infty]{}\frac{2}{2}=1$$

Ahora nos quedamos con los términos de mayor grado en *x*.

Calculators

Límites

Problema 5 $\lim_{x\to 0}\dfrac{2x}{\sqrt{2x^2+x+1}-\sqrt{x^2-3x+1}}$

Solución Re-escribimos

$$\frac{2x}{\sqrt{2x^2+x+1}-\sqrt{x^2-3x+1}}=$$

$$\frac{2x\left(\sqrt{2x^2+x+1}+\sqrt{x^2-3x+1}\right)}{\left(\sqrt{2x^2+x+1}-\sqrt{x^2-3x+1}\right)\left(\sqrt{2x^2+x+1}+\sqrt{x^2-3x+1}\right)}$$

$$=\frac{2x\left(\sqrt{2x^2+x+1}+\sqrt{x^2-3x+1}\right)}{\left(\sqrt{2x^2+x+1}\right)^2-\left(\sqrt{x^2-3x+1}\right)^2}=\frac{2x\left(\sqrt{2x^2+x+1}+\sqrt{x^2-3x+1}\right)}{x^2+4x}$$

Menor grado en *x*.

$$\frac{2\left(\sqrt{2x^2+x+1}+\sqrt{x^2-3x+1}\right)}{x+4}\xrightarrow[x\to 0]{}\frac{2\left(\sqrt{1}+\sqrt{+1}\right)}{4}=1$$

Calculators

Límites

Problema 6 $\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{sen}(3x)}{6x}$

Solución Usamos que $\lim_{\alpha\to 0}\frac{\mathrm{sen}(\alpha)}{\alpha}=1.$

Re-escribimos $\frac{\mathrm{sen}(3x)}{6x}=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{sen}(3x)}{3x}$

Como $\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{sen}(3x)}{3x}=1,$ se concluye que $\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{sen}(3x)}{6x}=\frac{1}{2}.$

Calculators

Límites

Problema 7 $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(\operatorname{sen}(x))}{x}$

Solución Re-escribimos:

$$\frac{\operatorname{sen}(\operatorname{sen}(x))}{x}=\frac{\operatorname{sen}(\operatorname{sen}(x))}{\operatorname{sen}(x)}\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\xrightarrow[x\to 0]{}1$$

como $\lim_{\alpha\to 0}\frac{\operatorname{sen}(\alpha)}{\alpha}=1.$ En lo anterior, se aplicó primero al sustituir $\alpha=\operatorname{sen}(x)$.

Por tanto $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(\operatorname{sen}(x))}{\operatorname{sen}(x)}=1.$

Calculators

Límites

Problema 8

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}\left(x^2\right)}{x\operatorname{sen}(x)}$$

Solución

Re-escribimos:

$$\frac{\operatorname{sen}\left(x^2\right)}{x\operatorname{sen}(x)}=\frac{\operatorname{sen}\left(x^2\right)}{x^2}\frac{x}{\operatorname{sen}(x)}\xrightarrow[x\to 0]{}1$$

Límites

Problema 9

$$\lim_{x\to 0}\frac{x+2\operatorname{sen}(x)}{\sqrt{x^2+2\operatorname{sen}(x)+1}-\sqrt{\operatorname{sen}^2(x)-x+1}}$$

Solución Re-escribimos

$$\frac{x+2\operatorname{sen}(x)}{\sqrt{x^2+2\operatorname{sen}(x)+1}-\sqrt{\operatorname{sen}^2(x)-x+1}}=$$

$$\frac{\left(x+2\operatorname{sen}(x)\right)\left(\sqrt{x^2+2\operatorname{sen}(x)+1}+\sqrt{\operatorname{sen}^2(x)-x+1}\right)}{\left(\sqrt{x^2+2\operatorname{sen}(x)+1}-\sqrt{\operatorname{sen}^2(x)-x+1}\right)\left(\sqrt{x^2+2\operatorname{sen}(x)+1}+\sqrt{\operatorname{sen}^2(x)-x+1}\right)}$$

$$=\frac{\left(x+2\operatorname{sen}(x)\right)\left(\sqrt{x^2+2\operatorname{sen}(x)+1}+\sqrt{\operatorname{sen}^2(x)-x+1}\right)}{\left(x^2+2\operatorname{sen}(x)+1\right)-\left(\operatorname{sen}^2(x)-x+1\right)}$$

$$=\frac{\left(x+2\operatorname{sen}(x)\right)\left(\sqrt{x^2+2\operatorname{sen}(x)+1}+\sqrt{\operatorname{sen}^2(x)-x+1}\right)}{x^2-\operatorname{sen}^2(x)+2\operatorname{sen}(x)+x}$$

Calculators

Límites

Solución (cont.)

Problema 9

$$\lim_{x\to 0}\frac{x+2\operatorname{sen}(x)}{\sqrt{x^2+2\operatorname{sen}(x)+1}-\sqrt{\operatorname{sen}^2(x)-x+1}}$$

Re-escribimos

$$\frac{x+2\operatorname{sen}(x)}{\sqrt{x^2+2\operatorname{sen}(x)+1}-\sqrt{\operatorname{sen}^2(x)-x+1}}$$

$$=\frac{\left(x+2\operatorname{sen}(x)\right)\left(\sqrt{x^2+2\operatorname{sen}(x)+1}+\sqrt{\operatorname{sen}^2(x)-x+1}\right)}{x^2-\operatorname{sen}^2(x)+2\operatorname{sen}(x)+x}$$

Dividimos por *x*.

$$=\frac{\left(1+2\dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x}\right)\left(\sqrt{x^2+2\operatorname{sen}(x)+1}+\sqrt{\operatorname{sen}^2(x)-x+1}\right)}{x-\operatorname{sen}(x)\dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x}+2\dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x}+1}\xrightarrow[x\to 0]{}\frac{3\times 2}{2+1}=2.$$

Se ha usado que sen(x)/x se acerca a 1 cuando $x\to 0$.

Calculators

Límites Laterales

Problema 10

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} e^{\operatorname{tg}(x)}$$

Solución

Para $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, $\operatorname{tg}(x) < 0$ and $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \operatorname{tg}(x) = -\infty$.

Por tanto $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} e^{\operatorname{tg}(x)} = 0.$

Calculators

Continuidad

Problema 11

¿Dónde es continua la función $y = \mathrm{tg}(x)$?

Solución

$$y = \mathrm{tg}(x) = \frac{\mathrm{sen}(x)}{\cos(x)}$$ es continua siempre que $\cos(x) \neq 0$.

Por tanto $y = \mathrm{tg}(x)$ es continua para $x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi,\ n \in \mathbb{Z}$.

Calculators

Continuidad

Problema 12 ¿Dónde es continua la función $f(\phi) = \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{\phi^2 - 1}\right)$?

Solución La función $f(\phi) = \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{\phi^2 - 1}\right)$ es continua en todos los puntos donde toma valores finitos.

Si $\phi = \pm 1$, $\dfrac{1}{\phi^2 - 1}$ no es finito, y $\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{\phi^2 - 1}\right)$ no está definido.

Si $\phi \neq \pm 1$, $\dfrac{1}{\phi^2 - 1}$ es finito, y $\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{\phi^2 - 1}\right)$ está definido y es finito.

Por tanto $\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{\phi^2 - 1}\right)$ es continua para $\phi \neq \pm 1$.

Continuidad

Problema 13

Determinar $\mathrm{f}(0)$ para que la función

$$\mathrm{f}(x)=\frac{x^2-x}{x-1},\ x\neq 0,\ \text{sea continua en } x=0.$$

Solución

La condición de continuidad de una función f en un punto x_0 es:

$\lim_{x\to x_0}\mathrm{f}(x)=\mathrm{f}(x_0)$. Por tanto $\mathrm{f}(0)$ debe cumplir $\mathrm{f}(0)=\lim_{x\to 0}\mathrm{f}(x)$.

Es decir $\mathrm{f}(0)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-x}{x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{x(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to 0}x=0.$

Continuidad

Un número x_0 en el que una función $f(x)$ está indefinida or es infinito se llama una singularidad de la función f. La singularidad es evitable, si $f(x_0)$ se puede definir de tal manera que la función f se convierte en continua en $x = x_0$.

Problema 14

¿Qué funciones de las siguientes tienen singularidades evitables en los puntos indicados?

solución

a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 8}{x + 2}, \quad x_0 = -2$

Evitable

b) $g(x) = \dfrac{x - 1}{|x - 1|}, \quad x_0 = 1$

No evitable

c) $h(t) = t \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{t}\right), \quad t_0 = 0$

No evitable

Calculators

Continuidad

Problema 15

Demostrar que la ecuación $\operatorname{sen}(x) = e^x$ tiene inifinitas soluciones.

Solución

$$\operatorname{sen}(x) = e^x \Leftrightarrow f(x) = \operatorname{sen}(x) - e^x = 0.$$

Por el Teorema de valor medio, una función continua toma cualquier valor entre dos de sus valores. Basta demostrar que la función f cambia de signo infinitas veces.

Nótese que $0 < e^x < 1$ para $x < 0$, y que $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) = (-1)^n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Por tanto $f(x) < 0$ para $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$ si n is un número impar negativo

y $f(x) > 0$ para $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$ si n es un número par negativo.

Por tanto en cada intervalo de la forma $\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi, \frac{\pi}{2} + (2n+1)\pi\right)$, $n \in \mathbb{Z}$ and $n < 0$,

hay una solución de la ecuación original. En consecuencia hay infinitas soluciones.

Calculators