9. Sea $f \in C^1([a,b])$ y supongamos que existe f'' en $(a,\ b)$. Además supongamos que $f(a) = f(b)$ y que $f'(a) = f'(b) = 0$. Prueba que existen x_1, $x_2 \in (a,\ b)$, $x_1 \neq x_2$,tal que $f''(x_1) = f''(x_2)$.

   Aplicando el teorema de Rolle a la función f en $[a,b]$ se sigue que existe un $c \in (a,\ b)$ tal que $f'(c) = 0$ Aplicando de nuevo el teorema de Rolle a la función f' en $[a,c]$ se sigue que existe un $x_1 \in (a,\ c) \subset (a,\ b)$ tal que $f''(x_1) = 0$. Aplicando de nuevo el teorema de Rolle a la función f' en $[c,b]$ se sigue que existe un $x_2 \in (c,\ b) \subset (a,\ b)$ tal que $f''(x_2) = 0$ y el ejercicio está resuelto.

10. Prueba que cada una de las ecuaciones

$$\begin{array}{l} a)\ x^{13} + 7x^3 - 5 = 0 \\ b)\ 3^x + 4^x = 5^x \end{array}$$

   tiene exactamente una raíz real.

   $a)$ Denotemos por $P(x) = x^{13} + 7x^3 - 5$. Entonces $P(0) = -5 < 0$ y $\lim_{x\to\infty} P(x) = +\infty$. Por la propiedad de los valores intermedios se sigue que existe al menos una raíz real positiva de $P(x) = 0$. Si hubiera dos raices distintas positivas entonces por el teorema de Rolle se tendría $P'(x_0) = 0$ para algún valor positivo x_0. Pero esto implicaría una contradicción ya que

$$P'(x) = 13\ x^{12} + 21\ x^2 = 0 \Longleftrightarrow x = 0.$$

   Finalmente, nótese que $P(x) < 0$ para $x < 0$.

   $b)$ Consideremos la función

$$f(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x - 1.$$

   Es claro que $f(2) = 0$. Si f se anulara en otro punto, entonces, por el teorema de Rolle, la derivada de f se anularía al menos en un punto. Pero esto nos conduciría a una contradicción ya que

$$f'(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^x\ \ln\frac{3}{5} + \left(\frac{4}{5}\right)^x\ \ln\frac{4}{5} < 0 \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

11. La ecuación

$$e^x = 1 + x$$

   tiene la raíz $x = 0$. Probar que no puede tener otra raíz real.

   Sea $f(x) = e^x - x - 1$. Obviamente $f(0) = 0$. Si existiese un x_0 tal que $f(x_0) = 0$, entonces, por el teorema de Rolle, existiría al menos un $c \in (0,\ x_0)$ tal que $f'(c) = 0$. Pero esto nos conduce a una contradicción ya que la derivada $f'(x) = e^x - 1$ sólo se anula en el punto $x = 0$, el cual no pertenece al intervalo $(0,\ x_0)$.

12. Probar que la ecuación

$$x^5 + 6x^3 - 2 = 0$$

tiene una única raíz real.

En efecto, si denotamos por $f(x) = x^5 + 6x^3 - 2$, se tiene que $f(0) = -2$ y $f(1) = 5$. En consecuencia, por el teorema de Bolzano o por la propiedad de los valores intermedios se deduce que existe un $x_0 \in (0,\ 1)$ tal que $f(x_0) = 0$, esto es, x_0 es una ráiz de la ecuación dada. Si hubiese otra raíz de $f(x)$, digamos x_1, entonces, por el teorema de Rolle, existiría al menos un $c \in (x_0,\ x_1)$ tal que $f'(c) = 0$. Pero esto nos conduce a una contradicción ya que la derivada $f'(x) = 5x^4 + 18x^2 > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

13. Prueba que la ecuación

$$x^{101} + x^{51} + x - 1 = 0$$

tiene exactamente una raíz real.

Si denotamos por $f(x) = x^{101} + x^{51} + x - 1$, se tiene que $f(0) = -1$ y $f(1) = 2$. Como f es continua en $[0,\ 1]$, por la propiedad de los valores intermedios se sigue que $f(x)$ tiene una raíz $x_1 \in (0,\ 1)$. Si $f(x)$ tuviera otra raíz, digamos x_2, entonces, por el teorema de Rolle, existiría al menos un $c \in (x_1,\ x_2)$ tal que $f'(c) = 0$. Pero esto nos conduce a una contradicción ya que la derivada $f'(x) = 101\ x^{100} + 51\ x^{50} + 1 > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

14. Sea $f(x)$ una función continua en el intervalo $[0,\ 2]$ con $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ y $f(2) = 2$. Supongamos que existe f'' en el intervalo $(0, 2)$. Probar que existe un $x_0 \in (0,\ 2)$ tal que $f''(x_0) = 0$.

Aplicando el teorema de Lagrange a la función $f(x)$ en el intervalo $[0,\ 1]$ se deduce que existe al menos un $x_1 \in (0,\ 1)$ tal que

$$f'(x_1) = f(1) - f(0) = 1.$$

Aplicando de nuevo el teorema de Lagrange a la función $f(x)$ en el intervalo $[1,\ 2]$ se sigue que existe al menos un $x_2 \in (1,\ 2)$ tal que

$$f'(x_2) = f(2) - f(1) = 1.$$

Por último, aplicando ahora el teorema de Rolle a la función f' en el intervalo $[x_1,\ x_2]$ se sigue que existe al menos un punto $x_0 \in (x_1,\ x_2) \subset (0,\ 2)$ tal que $f''(x_0) = 0$.

15. Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua y supongamos que existe f'' en el intervalo (a, b). Además se verifica que el segmento de extremos $(a,\ f(a))$ y $(b,\ f(b))$ corta a la gráfica de f en un punto $(c,\ f(c))$ con $a < c < b$. Probar que existe algún punto $x_0 \in (a, b)$ tal que $f''(x_0) = 0$.

Aplicando el teorema de Lagrange a la función $f(x)$ en el intervalo $[a,\ c]$ se deduce que existe al menos un $x_1 \in (a,\ c)$ tal que

$$f'(x_1) = \frac{f(c) - f(a)}{c - a}.$$

Aplicando de nuevo el teorema de Lagrange a la función $f(x)$ en el intervalo $[c,\ b]$ se sigue que existe al menos un $x_2 \in (c,\ b)$ tal que

$$f'(x_2) = \frac{f(b) - f(c)}{b - c}.$$

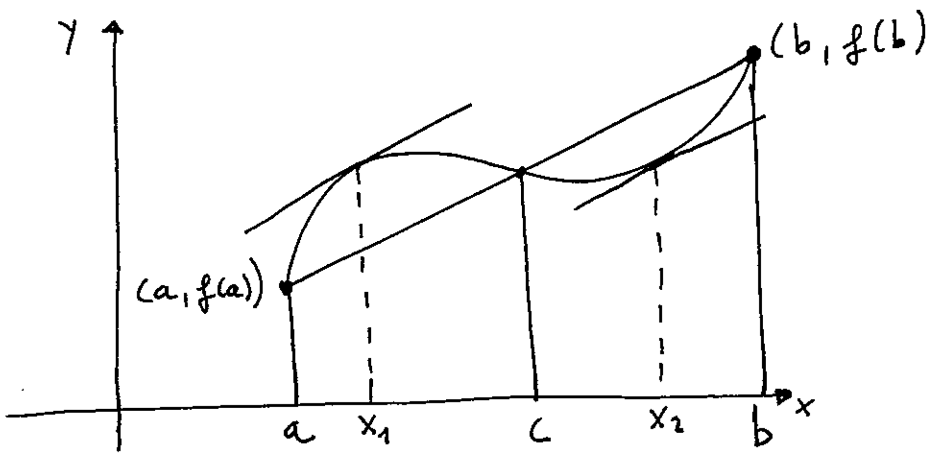
Ahora bien, como

$$\frac{f(c) - f(a)}{c - a} = \frac{f(b) - f(c)}{b - c} = \tan \alpha \text{ (Ver Figura abajo)}$$

se deduce que

$$f'(x_1) = f'(x_2)$$

Aplicando ahora el teorema de Rolle a la función f' en el intervalo $[x_1,\ x_2]$ se sigue que existe al menos un punto $x_0 \in (x_1,\ x_2) \subset (a,\ b)$ tal que $f''(x_0) = 0$.



16. Probar que la ecuación

$$x^8 + 5x^2 - 7 = 0$$

tiene exactamente dos raices reales.

Denotemos por $f(x)$ la función continua y derivable $f(x) = x^8 + 5x^2 - 7$. Nótese que f es una función par, esto es, $f(x) = f(-x)$, por lo que es simétrica respecto del eje OY. Teniendo en cuenta que $f(-2) = 29 > 0$ y $f(0) = -7 < 0$ y aplicando la propiedad de los valores intermedios o el teorema de Bolzano, se sigue existe al menos un punto $x_1 \in (-2,\ 0)$ tal que $f(x_1) = 0$. Por la simetría de la gráfica de f se tiene que existe un punto $x_2 \in (0,\ 2)$ tal que $f(x_2) = 0$. Veamos ahora que f sólo tiene estas dos raices reales. En efecto, puesto que

$$f'(x) = 8x^7 + 10x = x(8x^6 + 10) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$$

se sigue que $f'(x) < 0$ en $(-\infty,\ 0)$. Esto implica que f será estrictamente decreciente en $(-\infty,\ 0)$ por lo que f tendrá como mucho un cero en $(-\infty,\ 0)$. Por simetría, f será estrictamente creciente en $(0,\ +\infty)$ y tendrá exactamente dos ceros en $(-\infty,\ \infty)$.

17. Probar que la ecuación

$$x^2 = x\ senx + \cos x$$

tiene exactamente dos raices reales.

Denotemos por $f(x)$ la función continua y derivable $f(x) = x^2 - x\ senx - \cos x$. Nótese que f es una función par, esto es, $f(x) = f(-x)$, por lo que es simétrica respecto del eje OY. Teniendo en cuenta que $f(-\frac{\pi}{2}) > 0$ y $f(0) = -1 < 0$ y aplicando la propiedad de los valores intermedios o el teorema de Bolzano, se sigue existe al menos un punto $x_1 \in \left(-\frac{\pi}{2},\ 0\right)$ tal que $f(x_1) = 0$. Por la simetría de la gráfica de f se tiene que existe un punto $x_2 \in \left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$ tal que $f(x_2) = 0$. Veamos ahora que f sólo tiene estas dos raices reales. En efecto, puesto que

$$f'(x) = 2x - senx - x\cos x + senx = x(2 - \cos x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$$

se sigue que $f'(x) < 0$ en $(-\infty,\ 0)$. Esto implica que f será estrictamente decreciente en $(-\infty,\ 0)$ por lo que f tendrá como mucho un cero en $(-\infty,\ 0)$. Por simetría, f será estrictamente creciente en $(0,\ +\infty)$ y tendrá exactamente dos ceros en $(-\infty,\ \infty)$.