**E.T.S.I.T.**

SUCESIONES Y LÍMITES PROBLEMAS - 4

**1**.- Sea $(E, d)$ un espacio métrico. Demostrar que toda sucesión convergente es de Cauchy.

**2**.- Sea $(E, d)$ un e. m. Demostrar que toda sucesión de Cauchy es un conjunto acotado.

**3**.- Comprobar que la sucesión definida por $x_1 = 1,\ x_n = \sqrt{1+2x_{n-1}} - 1$, es acotada y monótona. Deducir que la sucesión es convergente y hallar su límite.

**4**.-Calcular los límites siguientes, y hallar el resultado que se indica:

**a)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n-\sqrt{n^2-an}\right) = \dfrac{a}{2}$

**b)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n^3+2n^2+1}-\sqrt[3]{n^3-7}\right) = \dfrac{2}{3}$

**c)** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^{(n+1)/n}-n}{\ln n} = 1$

**d)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+an+c}{n^2+bn+d}\right)^{An+B} = e^{A(a-b)}$

**e)** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2\sqrt{2}+3\sqrt[3]{3}+\ldots+n\sqrt[n]{n}}{n^2} = \dfrac{1}{2}$

**f)** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}\left[1^2\operatorname{sen} a+2^2\operatorname{sen}\dfrac{a}{2}+\ldots+n^2\operatorname{sen}\dfrac{a}{n}\right] = \dfrac{a}{2}$

**g)** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2^a+3^a+\ldots+n^a}{n^{a+1}} = \dfrac{1}{a+1}$

**h)** $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{(n+1)(n+2)\ldots(n+n)}{n!}} = 4$

**i)** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}\left[2+\dfrac{3^2}{2}+\dfrac{4^3}{3^2}+\ldots+\dfrac{(n+1)^n}{n^{n-1}}\right] = \dfrac{e}{2}$

**j)** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\ln n}\left[1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\ldots+\dfrac{1}{n}\right] = 1$

**k)** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2e^{1/2}++\ldots+ne^{1/n}}{n^2} = \dfrac{1}{2}$

**l)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{5}{1}\right)^{\frac{1}{n}}\cdot\left(\dfrac{6}{2}\right)^{\frac{2}{n}}\cdot\ldots\cdot\left(\dfrac{n+4}{n}\right)^{\frac{n}{n}} = e^4$

**m)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n-\dfrac{2n}{n+1}\right]^{-n} = +\infty$

**n)** $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\binom{n}{1}\binom{n}{2}\ldots\binom{n}{n}} = \sqrt{e}$

**o)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left[n-n^2\ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right)\right] = \frac{1}{2}$

**p)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[a]{n^a+n^{a-1}}-\sqrt[a]{n^a-n^{a-1}}\right)^{\sqrt[n]{n!}/n} = \left(\dfrac{2}{a}\right)^{1/e}$

**q)** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n\left(e^{1/n}-1\right)} = 1$

**r)** $\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{j=1}^{n}\left(1+\dfrac{j}{n}\right)^{\frac{1}{n}} = \dfrac{4}{e}$

**s)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{\dfrac{1+3n}{5+3n}}\right)^{n^2/2n-1} = e^{-1/3}$

**t)** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n!}{\ln n^n} = 1$

**u)** $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^2\left(1+\dfrac{2}{n}\right)^2\ldots\left(1+\dfrac{n}{n}\right)^2} = \left(\dfrac{4}{e}\right)^a$

**v)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\cos\sqrt{\dfrac{2\pi}{n}}\right)^n = e^{-\pi}$

**w)** $\lim\limits_{x\to 0}(\cos ax)^{\frac{1}{x^2}} = e^{-a^2/2}$

**x)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{3\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{2}{5\sqrt{n^2+1}}+\cdots+\dfrac{n}{(2n+1)\sqrt{n^2+1}}\right] = \dfrac{1}{2}$

**y)** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\ln n}{\sum\limits_{k=1}^{n}\ln k} = 1$

**z)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n-\dfrac{n}{n+1}\right]^{-n} = 0$

**5**.- Si se sabe que la sucesión $\{x_n\}$ es de números positivos y que $\lim\limits_{n\to\infty} n\left[\dfrac{x_n}{x_{n+1}}-1\right] = k$, con $k$ distinto de cero y de infinito, hallar $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln\frac{1}{x_n}}{\ln n}$. (Sol. = $k$)

**6**.- Si se sabe que $\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{x_{n-1}}=k$, hallar $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n^2]{x_1x_2\ldots x_n}$. (Sol. = $\sqrt{k}$ )

**7**.- Hallar la relación entre a y b para que $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+a}{n+1}\right)^{2n+3}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+3}{n+2}\right)^{bn+4}$.

(Sol: $b=2a-2$ )

**8**.- Si se sabe que $\lim_{n\to\infty}x_n=x$, hallar $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}\left[x_1+\frac{x_2}{2}+\frac{x_3}{3}+\ldots+\frac{x_n}{n}\right]$. (Sol. = x)

**9**.- Hallar, si existe, el límite siguiente: $\lim_{n\to\infty}\frac{1+2\sqrt{\pi}+3\sqrt[3]{\pi}+\ldots+n\sqrt[n]{\pi}}{n^2}$. (Sol. = $1/2$)

**10**.- Hallar, si existe, el límite siguiente: $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{1}\right)^{\frac{1}{n}}\cdot\left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{2}{n}}\cdot\ldots\cdot\left(\frac{n^2+1}{n^2}\right)^{\frac{n}{n}}$. (Sol. =1)

**11**.- Hallar el límite $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}}$, si $a_n=\frac{(-\pi)^n}{n^2\ln n}x^n$.

**12**.- Hallar, si existe, el límite siguiente: $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}\left[1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\ldots+\sqrt{n}\right]$ (Sol. =2/3)

**13**.- Hallar, si existe, el límite siguiente: $\lim_{n\to+\infty}n\left(\sqrt[3]{1-\frac{1}{n}}-1\right)$ (Sol. =-1/3)

**14**.- Sean $(E,d)$ y $(F,d')$ dos espacios métricos y una función $f:(E,d)\longrightarrow(F,d')$. Demostrar que si $f$ es uniformemente continua en $A\subset E$, entonces $f$ es continua en $A$.

**15**.- Sean $(E,d)$ y $(F,d')$ dos espacios métricos y una función $f:(E,d)\longrightarrow(F,d')$. Demostrar que si $f$ es lipschitziana, entonces $f$ es uniformemente continua en $A$.

**16**.- Justificar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas :

**a**) Una sucesión con dos límites es oscilante.

**b**) Toda sucesión de Cauchy de números racionales tiene como límite un número racional (con la métrica fundamental).

**17**.- **a**) Dada una función $f:([a,b],d_f)\longrightarrow(R,d_f)$ continua y con derivada continua en $[a,b]$, demostrar que *f* es lipschitziana en $[a,b]$.

**b**) Comprobar que la función $f(x)=x^2\,\mathrm{sen}\frac{1}{x}$, para $x\neq 0$ y siendo $f(0)=0$, no cumple las hipótesis del apartado a) en $[0,1]$. Dígase cuáles.

**c**) Determinar qué condiciones adicionales debe cumplir la función del apartado a) para asegurar que existe un único en $\alpha\in[a,b]\mid\alpha=f(\alpha)$.

**18**.- Hallar, si existe, el límite siguiente: $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{(1-\cos xy)\,\mathrm{sen}\,x}{x^2+y^2}$.

**19.-** Hallar, si existe, el límite en el origen de la función:

$$f(x,y)=\begin{cases}\cos(xy)\cdot e^{-\frac{1}{xy}} & si\quad x\neq 0,\ \text{e}\ y\neq 0\\ 0 & si\quad x=0,\ \text{ó}\ y=0\end{cases}$$

**20.-** Hallar, si existe, el límite en el origen de la función:

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^5}{\left(y-x^2\right)^2+x^8} & si\quad (x,y)\neq(0,0)\ y\neq 0\\ 0 & si\quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$