NÚMEROS COMPLEJOS

1.- Expresar los siguientes números complejos en la forma $a + ib$, con $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\text{a) } (1+i)^3 \;;\; \text{b) } \frac{2+3i}{3-4i} \;;\; \text{c) } \frac{i^4+i^9+i^{16}}{2-i^5+i^{10}-i^{15}} \;;\; \text{d) } \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^5 \;;\; \text{e) } \sum_{m=1}^{4n} \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^m .$$

2.- Sea $w = \dfrac{1+z}{1-z}$, con $w = u + iv$ y $z = x + iy$ $(x, y, u, v \in \mathbb{R})$. Probar que

$$x = \frac{u^2+v^2-1}{(u+1)^2+v^2} \;;\quad y = \frac{2v}{(u+1)^2+v^2} .$$

3.- Sea $z = a + ib$ $(a, b \in \mathbb{R})$, $z \neq 0$, $z \neq -1$. Demostrar que existen p, m y n independientes de z tales que

$$\frac{(a^2+b^2)(a^2+b^2+2a+1)}{a^2-b^2+a-(1+2a)bi} = p + mz + nz^2.$$

Hallar p, m y n.

4.- Sea $z \in \mathbb{C}$ con $|z| = 1$ y $z \neq 1$. Probar que $\dfrac{1+z}{1-z}$ es imaginario.

5.- Sean $w, z \in \mathbb{C}$ tales que $w = \dfrac{z-a}{az-1}$ con $0 < a < 1$. Probar que $|w| < 1$ si y sólo si $|z| < 1$.

6.- Probar que si $|a| = 1$ ó $|b| = 1$, entonces $\left|\dfrac{a-b}{1-\overline{a}b}\right| = 1$. ¿Qué excepción debe hacerse si $|a| = |b| = 1$?

7.- Sean $z, w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tales que $|z+w| = |z-w|$. Probar que $\dfrac{w}{z}$ es imaginario.

8.- Definimos $e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$, si $\theta \in \mathbb{R}$. Sea $n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$. Demostrar que si $z_k = e^{i2\pi k/n}$ $(0 \leq k \leq n-1)$, entonces $z_k^n = 1$ y $z_1^k = z_k$. Probar además que si $1 \leq k \leq n-1$, z_k satisface la ecuación $1 + w + \ldots + w^{n-1} = 0$.

9.- Hallar el módulo y un argumento de $1 + \cos\phi + i \operatorname{sen}\phi$, donde $-\pi \leq \phi \leq \pi$.

10.- Calcular en forma binómica $\left(\dfrac{1+\operatorname{sen} a + i\cos a}{1+\operatorname{sen} a - i\cos a}\right)^n$, con $n \in \mathbb{N}$ y $a \in \mathbb{R}$.

11.- Dado $a \in \mathbb{R}$, resolver la ecuación $\left(\dfrac{1+xi}{1-xi}\right)^4 = \dfrac{1+ai}{1-ai}$, con $x \in \mathbb{R}$.

12.- Probar que $1 + \cos\dfrac{2\pi}{5} + \cos\dfrac{4\pi}{5} + \cos\dfrac{6\pi}{5} + \cos\dfrac{8\pi}{5} = 0$ y dar una interpretación geométrica.

13.- Probar que la suma de las potencias n-ésimas de las raíces k-ésimas de la unidad es k ó 0, según n sea o no múltiplo de k.

14.- Hallar $\cos\dfrac{\pi}{5}$ y $\cos\dfrac{2\pi}{5}$.

15.- Sean $\alpha \in \mathbb{R}$ y $w \in \mathbb{C}$ tales que $2\cos\alpha = w + \dfrac{1}{w}$. Obtener $2\cos n\alpha$ en función de w.

16.- Hallar $x, y \in \mathbb{R}$ tales que $x + iy = (2 + \cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha)^{-1}$, con $\alpha \in \mathbb{R}$. Probar que el punto (x, y) está en un círculo cuyo diámetro es el segmento que une los puntos $(\frac{1}{3}, 0)$ y $(1, 0)$.

17.- Sean $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ tales $z_1 z_2 = 1$ y $|z_1| = 1$. Probar que $z_1 + z_2 \in \mathbb{R}$. Probar así mismo que la función $f(z) = z + \dfrac{1}{z}$ toma cualquier valor de $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ en uno y solo un punto de la región $\{z \in \mathbb{C};\ |z| < 1\}$.

18.- Demostrar que la ecuación $(z + i)^n - (z - i)^n = 0$ tiene todas sus raíces reales y determinarlas.

19.- Hallar los números complejos que son iguales a la potencia n-ésima de sus conjugados.

20.- Sean z_1 y z_2 las dos soluciones de la ecuación $az^2 + bz + c = 0$, donde $a, b, c \in \mathbb{R}$. Demostrar que $z_1^n + z_2^n \in \mathbb{R}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Para la ecuación $z^2 - 2z + 2 = 0$, calcular $z_1^n + z_2^n$.

21.- Hallar los números complejos z tales que $z^2 + 2(\overline{z})^2 + z - \overline{z} + 9 = 0$.

22.- Hallar la condición que deben cumplir los números reales a, b, c, d para que la ecuación $z^3 + az^2 + (b + ic)z + b + id = 0$ admita una raíz real.

23.- Resolver la ecuación $z^4 + (-3+5i)z^3 - (15+15i)z^2 + (125-75i)z + 625i = 0$, sabiendo que tiene dos raíces conjugadas cuyo producto es 25.

24.- a) Demostrar que si $a \in \mathbb{R}$, $(z + a)^{2m} - (z - a)^{2m} = 4amz \displaystyle\prod_{k=1}^{m-1} \left(z^2 + a^2 \operatorname{cotg}^2 \frac{k\pi}{2m} \right)$.

b) Usando el apartado anterior, probar que $\displaystyle\prod_{k=1}^{m-1} \operatorname{cotg} \frac{k\pi}{2m} = 1$.

25.- Expresar en potencias de $\cos\theta$, $\theta \in \mathbb{R}$, los números: $\cos 6\theta$, $\cos 3\theta$, $\dfrac{\operatorname{sen} 6\theta}{\operatorname{sen}\theta}$, $\dfrac{\operatorname{sen} 5\theta}{\operatorname{sen}\theta}$. Expresar en potencias de $\operatorname{sen}\theta$, $\theta \in \mathbb{R}$, los números: $\operatorname{sen} 3\theta$, $\operatorname{sen} 7\theta$.

26.- Sea $a = e^{2\pi i/13}$. Probar que $a + a^3 + a^4 + a^9 + a^{10} + a^{12} = \dfrac{\sqrt{13} - 1}{2}$.

27.- Sea $z = e^{2\pi i/7}$. Calcular $\displaystyle\sum_{n=1}^{6} z^{n^2}$.

28.- Hallar la suma $1 + 2\cos\theta + 2\cos 2\theta + \ldots + 2\cos n\theta$.

29.- Resolver las ecuaciones:

a) $\operatorname{sen} 5t - 5\operatorname{sen} 3t + 10\operatorname{sen} t = \dfrac{1}{2}$.

b) $\operatorname{sen} 4t - 2\operatorname{sen} t\cos t = 0$.