

PROBLEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES

Manuel Calvo

CURSO 2005/06

Capítulo 1

MÉTODOS ELEMENTALES DE INTEGRACIÓN

1.1. Ecuaciones de variables separables

1) Calcula, por separación de variables, la solución general de las siguientes ecuaciones de primer orden. Además, en caso de dar condiciones iniciales, determina las soluciones de los problemas de valor inicial (PVI) así como su intervalo maximal de definición.

$$1) \dots\dots\dots \frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + 1}{2 - 2y}, \quad y(-3) = 4, \quad y(-3) = -2.$$

$$2) \dots\dots\dots \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}, \quad y(1) = 2$$

$$3) \dots\dots\dots \frac{dy}{dx} = -\frac{3x + 3xy^2}{yx^2 + 2y}.$$

$$4) \dots\dots\dots \frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{x^2 + x^2y^2}{y^2 + x^2y^2}}.$$

$$5) \dots\dots\dots \frac{dy}{dx} = \frac{x + xy^2}{4y}, \quad y(1) = 0.$$

- 6)..... $\frac{dy}{dx} = -3y \cot(x), \quad y(\pi/2) = 2.$
- 7)..... $\frac{dy}{dx} = -\frac{\sin^2 y}{\cos^2 x}, \quad y(\pi/4) = \pi/4.$
- 8)..... $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x^3 y^2 + x^3}.$
- 9)..... $\frac{dy}{dx} = -\frac{3x + xy^2}{2y + x^2 y}, \quad y(2) = 1.$
- 10)..... $\frac{dy}{dx} = \frac{(y^2 + 2y - 3)(x - 2)}{(x^2 + 2x - 3)(y - 2)},$
- 11)..... $\frac{dr}{d\theta} = \frac{\sin \theta + e^{2r} \sin \theta}{3e^r + e^r \cos \theta}, \quad r(\pi/2) = 0.$

2) La ecuación

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4y^2 - x^4}{4xy},$$

no es separable. Comprueba que la transformación $y \rightarrow v$ dada por $y = vx$ convierte la ecuación anterior en otra de variables separables. Resuelve la nueva ecuación y calcula la solución general de la ecuación original.

3) Una ecuación de la forma

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y f(xy)}{x g(xy)},$$

no es separable. Sin embargo comprueba que la transformación $y \rightarrow v$ dada por $y = v/x$ convierte la ecuación anterior en otra separable. Aplica esta técnica para calcular la solución general de las siguientes ecuaciones:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y - xy^2}{x + x^2 y}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1 - xy + x^2 y^2}{x^2 - x^3 y}.$$

1.2. Problemas de ecuaciones homogéneas

1) Calcula la solución general de las siguientes ecuaciones homogéneas. En el caso de dar condiciones iniciales calcula la solución particular y su intervalo maximal de definición

- 1)..... $\frac{dy}{dx} = \frac{2y^2 - x^2}{xy}$.
- 2)..... $\frac{dy}{dx} = \frac{3xy + 2y^2}{x^2}$.
- 3)..... $\frac{dy}{dx} = \frac{xy - 3(x^2 + y^2) \arctan(y/x)}{x^2}$.
- 4)..... $\frac{dy}{dx} = \frac{y \operatorname{sen}(y/x) + x}{x \operatorname{sen}(y/x)}$.
- 5)..... $\frac{dy}{dx} = \frac{y + 2x \exp(-y/x)}{x}$.
- 6)..... $\frac{dy}{dx} = \frac{3x + 2y}{x}, \quad y(1) = 2.$
- 7)..... $\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x}$.
- 8)..... $\frac{dy}{dx} = \frac{x^3 + y^3}{xy^2}, \quad y(1) = 1.$

2) Calcula la solución general de las siguientes ecuaciones reducibles a homogéneas.

- 1)..... $\frac{dy}{dx} = \frac{x + y + 4}{x - y - 6}.$
 - 2)..... $\frac{dy}{dx} = \frac{x + y - 1}{x + 4y + 2}.$
 - 3)..... $\frac{dy}{dx} = \frac{x + y + 4}{x + y - 6}.$
 - 4)..... $\frac{dy}{dx} = \frac{2x + 3y - 1}{4x + 6y}.$
-

3) Haciendo un cambio $y \rightarrow u$ del tipo $u = y/x^n$ con exponente n adecuado calcula la solución general de las siguientes ecuaciones

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 - xy^2}{2x^2y}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y - xy^2}{x + x^2y}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2 + 3xy^2}{4x^2y}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1 - 2xy - 2x^2y - 2x^3y^2 - 3x^4y^2}{x^2(1+x)(1+yx^2)}.$$

1.3. Ecuaciones lineales

1) Describe el conjunto de soluciones de las siguientes ecuaciones diferenciales lineales

- 1)..... $\frac{dy}{dx} = \left(\frac{1}{x-1}\right)y + x$
- 2)..... $\frac{dy}{dx} + (\log x)y = \log x \left(\frac{2}{x} + (\log x)^2\right)$
- 3)..... $x \frac{dy}{dx} + 2y = 3$
- 4)..... $y' = 2y + x^2 + 5$
- 5)..... $(1 + e^x) \frac{dy}{dx} + e^x y = 0$
- 6)..... $(1 - x^3) \frac{dy}{dx} = 3x^2 y$
- 7)..... $\frac{dy}{dx} + \cot(x)y = 2 \cos x$
- 8)..... $x \frac{dy}{dx} + 4y = x^3 - x$
- 9)..... $(1 - \cos x) dy + (2y \operatorname{sen} x - \tan x) dx = 0$
- 10)..... $y dx + (xy + 2x - y e^y) dy = 0$
- 11)..... $(x - 1) \frac{dy}{dx} + (x + 1)y = x^3 + 3x^2 - 2x$

- 12)..... $x^3 \frac{dy}{dx} + (2 - 3x^2)y = x^3$
- 13)..... $y \ln y \, dx + (x - \ln y) \, dy = 0$
- 14)..... $\frac{dy}{dx} + \cot x \, y = 5 e^{\cos x}$
- 15)..... $dr + (2r \cot \theta + \operatorname{sen}(2\theta)) \, d\theta = 0$
- 16)..... $y(1 + y^2) \, dx = 2(1 - 2xy^2) \, dy$
- 17)..... $(1 + \operatorname{sen} y) \, dx = [2y \cos y - x(\sec y + \tan y)] \, dy$
-

1.4. Ecuaciones diferenciales exactas

1) Escribe cada una de las siguientes ecuaciones en la forma $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$, comprueba su exactitud y resuelve aquellas que sean exactas.

- 1)..... $\frac{dy}{dx} = \frac{x - y^2}{2xy + y}$.
- 2)..... $2 \, xy \, y' = x^2 - y^2$.
- 3)..... $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{x + y}$.
- 4)..... $\frac{dy}{dx} = \frac{x - y \cos x}{\operatorname{sen} x + y}$.
- 5)..... $(ye^{-x} - \operatorname{sen} x)dx - (e^{-x} + 2y)dy = 0$.
- 6)..... $\left(x^2 + \frac{y}{x}\right) dx + (\log x + 2y)dy = 0$.
- 7)..... $\frac{dy}{dx} = \frac{y(y - e^x)}{e^x - 2xy}$.
- 8)..... $(x^2 + x)dy + (2xy + 1 + 2 \cos x)dx = 0$.
- 9)..... $(x\sqrt{x^2 + y^2} - y)dx + (y\sqrt{x^2 + y^2} - x)dy = 0$.
- 10)..... $(4x^3y^3 + 1/x)dx + (3x^4y^2 - 1/y)dy = 0$.

$$11) \dots \left(y^2 - \frac{y}{x(x+y)} + 2 \right) dx + \left(\frac{1}{x+y} + 2y(x+1) \right) dy = 0.$$

$$12) \dots \left(2xye^{x^2y} + y^2e^{xy^2} + 1 \right) dx + \left(x^2e^{x^2y} + 2xye^{xy^2} - 2y \right) dy = 0.$$

2) Resuelve las siguientes ecuaciones con las condiciones iniciales indicadas y determina su intervalo maximal de definición

$$1) \dots \frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - 2x}{2y - 2xy}, \quad y(1) = 2.$$

$$2) \dots \frac{dy}{dx} = \frac{2x - \operatorname{sen} y}{x \cos y}, \quad y(2) = 0.$$

$$3) \dots 2xydx + (x^2 + 1)dy = 0, \quad y(1) = -3.$$

$$4) \dots (x^2 + 2ye^{2x})y' + 2xy + 2y^2e^{2x} = 0, \quad y(1) = 1.$$

$$5) \dots \frac{dy}{dx} = \frac{\operatorname{sen}(2x) - \tan y}{x \sec^2(y)}, \quad y(\pi) = \pi/4.$$

3) Para cada una de las ecuaciones siguientes, obtener un factor integrante de la forma indicada y resolverlas

$$1) \dots (x - x^2 - y^2)dx + ydy = 0, \quad \mu = \mu(x^2 + y^2).$$

$$2) \dots (2y - 3x)dx + xdy = 0, \quad \mu = \mu(x).$$

$$3) \dots (3x^2 + y^2)dx - 2xydy = 0, \quad \mu = \mu(x).$$

$$4) \dots (xy - 2y^2)dx - (x^2 - 3xy)dy = 0, \quad \mu = x^\alpha y^\beta.$$

$$5) \dots (4xy + 3y^4)dx + (2x^2 + 5xy^3)dy = 0, \quad \mu = x^\alpha y^\beta.$$

$$6) \dots (8y + 4x^2y^4)dx + (8x + 5x^3y^3)dy = 0, \quad \mu = x^\alpha y^\beta.$$

$$7) \dots (y + x^3y + 2x^2)dx + (x + 4xy^4 + 8y^3)dy = 0, \quad \mu = \mu(xy).$$

4) Dada la ecuación diferencial $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$, donde P y Q son funciones homogéneas del mismo grado,

- Prueba que $\mu = \frac{1}{xP + yQ}$ es un factor integrante de dicha ecuación supuesto $xP(x, y) + yQ(x, y) \neq 0$.
- Estudia el caso $xP + yQ \equiv 0$.
- Aplica el ejercicio anterior a la resolución de las ecuaciones

$$1) \quad y^2 dx + (x^2 - xy - y^2)dy = 0,$$

$$2) \quad (x^4 + y^4)dx - xy^3 dy = 0.$$

5) Dada la ecuación

$$Pdx + Qdy \equiv yf_1(xy)dx + xf_2(xy)dy = 0$$

con $xP - yQ = xy(f_1(xy) - f_2(xy)) \neq 0$,

- Prueba que $\frac{1}{(xP - yQ)}$ es un factor integrante en el conjunto apropiado.
- Aplica el ejercicio anterior a la resolución de las ecuaciones

$$1) \quad y(x^2 y^2 + 2)dx + x(2 - 2x^2 y^2)dy = 0,$$

$$2) \quad y(2xy + 1)dx + x(1 + 2xy - x^3 y^3)dy = 0.$$

Algunos tipos de factores integrantes

Condición sobre la ED

Factor Integrante

$$\frac{P_y - Q_x}{Q} = g(x)$$

$$\mu(x) = \exp(\int g(x) dx)$$

$$\frac{P_y - Q_x}{P} = -g(y)$$

$$\mu(y) = \exp(\int g(y) dy)$$

$$\frac{P_y - Q_x}{Q - P} = g(x + y)$$

$$\mu(x + y) = \exp(\int g(x + y) dx + y)$$

$$\frac{P_y - Q_x}{P + Q} = g(x - y)$$

$$\mu(x - y) = \exp(\int g(x - y) dx - y)$$

$$\frac{P_y - Q_x}{yQ - xP} = g(xy)$$

$$\mu(xy) = \exp(\int g(xy) dx + y)$$

$$\frac{P_y - Q_x}{xQ - yP} = g(x^2 + y^2)$$

$$\mu(x^2 + y^2) = \exp((1/2) \int g(x^2 + y^2) dx + y^2)$$

$$\frac{nQ}{x} - \frac{mP}{y} = P_y - Q_x$$

$$\mu(x, y) = x^n y^m$$

6) Calcula la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales buscando un factor integrante adecuado para cada ejercicio

1) $x dx + (y + 4y^3x^2 + 4y^5) dy = 0.$

2) $(x + x^4 + 2x^2y^2 + y^4) dx + y dy = 0$

3) $(xy + \sqrt{1 - x^2y^2}) dx + x^2 dy = 0$

4) $\left(y^2 - \frac{y}{x(x+y)} + 2\right) dx + \left(\frac{1}{x+y} + 2y(x+1)\right) dy = 0.$

5) $(\tan y - \tan^2 y \cos x) dx - x \sec^2 y dy = 0.$

6) $xy' + y \log x = y \log y + y.$

7) Prueba que si μ y ν son dos factores integrantes independientes de $Pdx + qdy = 0$ entonces su solución general es $\mu = c\nu$. Ilustra el resultado calculando dos factores integrantes de $xdy - ydx = 0$.

8) Prueba que si la ecuación $Pdx + Qdy = 0$ es exacta y homogénea su solución general es $Px + Qy = c$. aplica el resultado a la ecuación $(x^2 + y^2)dx + 2xydy = 0$.

1.5. Ecuaciones de tipo Bernoulli

1) Calcula la solución general de las siguientes ecuaciones de Bernoulli

1) $y' - y = xy^5$

2) $y' + 2xy + xy^4 = 0$

3) $y' + \frac{1}{3}y = \frac{1}{3}(1 - 2x)y^4$

4) $y' + y = y^2(\cos x - \operatorname{sen} x)$

5) $xy' = y + xy^3(1 + \log x)$

6) $xy' + y = x^3y^6$

7) $\frac{dx}{dy} - \frac{x}{y} + x^3 \cos y = 0$

8) $y^2 + (xy - x^3)y' = 0$

1.6. Campos de pendientes de ecuaciones diferenciales

1) Dado el siguiente campo de pendientes de una ecuación diferencial

dibuja aproximadamente algunas curvas solución de dicha ecuación

2) Usando el campo de pendientes de la ecuación diferencial, haz un esbozo del espacio de fases de las siguientes ecuaciones

1) $y' = y^3 - y$

2) $y' = y \cos y$

3) $y' = \frac{y^4 - 5y^2 + 4}{y^2}$

4) $y' = \sqrt{y} \operatorname{sen} y$

5) $y' = \frac{\operatorname{sen} y}{y}$

3) El campo de pendientes de la ecuación diferencial $y' = x^2 + y^2$ para $x \in [-2, 2], y \in [-1, 1]$ es

- Dibuja algunas curvas integrales de dicho campo.
- Prueba que si $y(x)$ es solución definida en $[0, a)$, $-y(x)$ también es solución en $x \in (-a, 0]$ y por tanto las curvas solución son simétricas respecto al origen.
- Prueba que toda solución $y(x)$ explota en tiempo finito, es decir existe $0 < \tau < +\infty$ tal que

$$\lim_{x \rightarrow \tau} |y(x)| = +\infty$$

4) El campo de pendientes de la ecuación homogénea $y' = 1 + (y/x)$ para $x \in [0, 2]$, $y \in [-1, 1]$ tiene la forma

Esboza algunas curvas solución. Resuelve la ecuación por métodos analíticos y compara con el comportamiento geométrico.

1.7. Trayectorias ortogonales a una familia de curvas

1) Halla la familia de curvas ortogonal a la familia de círculos con centro en el eje OX y que pasan por el origen.

2) Halla las trayectorias ortogonales a la familia de círculos que pasan por los puntos $(1, 9)$ y $(0, -1)$.

3) Calcula las trayectorias ortogonales a las siguientes familias de curvas

- | | |
|----------------------|------------------------------|
| 1) $xy = C$ | 2) $y = C x^2$ |
| 3) $y = C e^x$ | 4) $y = C x^4$ |
| 5) $y^2 = 4C(x + C)$ | 6) $y^2 = \frac{x^3}{C - x}$ |

4) Prueba que las trayectorias ortogonales a una familia de curvas dada en las coordenadas polares ρ y θ por la ecuación diferencial

$$\frac{d\rho}{d\theta} = f(\rho, \theta)$$

verifica la ecuación

$$\frac{d\rho}{d\theta} = -\frac{\rho^2}{f(\rho, \theta)}$$

5) Calcula las trayectorias ortogonales a las siguientes familias de curvas

- | | |
|------------------------------------------|---------------------------------------|
| 1) $\rho = 2C \operatorname{sen} \theta$ | 2) $\rho = \frac{C}{1 - \cos \theta}$ |
| 3) $\rho = C(\sec \theta + \tan \theta)$ | |

6) La familia de curvas que forma un ángulo α con otra familia Γ dada por $f(x, y, y') = 0$ verifica

$$f\left(x, y, \left(\frac{y' - \tan \alpha}{1 + y' \tan \alpha}\right)\right) = 0.$$

Calcula la familia de curvas que forma un ángulo de 45 grados con la familia de círculos de centro el origen.

7) Calcula la familia de curvas que forma un ángulo de 45 grados con la familia de circunferencias cuyo centro está situado en la bisectriz del primer cuadrante y pasan por el origen.

Capítulo 2

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES Y ECUACIONES DE ORDEN SUPERIOR

2.1. Sistemas lineales con coeficientes constantes

1) Calcula la solución general de los siguientes sistemas diferenciales lineales:

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 5 \cos t \\ 5 \cos t \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 7 \\ 4 & 4 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} -8e^t \\ -33e^t \\ -8e^t \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 3 & 7 & -5 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}, \quad \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -10 & 5 & 4 \\ -17 & 9 & 7 \\ -11 & 5 & 5 \end{pmatrix} \mathbf{x},$$

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 10 & -3 & 0 \\ 18 & -5 & 0 \\ 9 & -3 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}, \quad \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \mathbf{x},$$

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -9 & 4 & 3 \\ -5 & 1 & 4 \end{pmatrix} \mathbf{x}, \quad \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 13 & -7 & 5 \\ 28 & -14 & 9 \\ 12 & -6 & 4 \end{pmatrix} \mathbf{x},$$

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 4 & 4 & 8 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 3(-6+t)e^{-t} \\ -2(6+t)e^{-t} \\ 4(-10+t)e^{-t} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 5 \\ 15 & 9 & 15 \\ 10 & 10 & 4 \end{pmatrix} \mathbf{x}, \quad \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -3 & 9 & 3 \\ -1 & 1 & 7 \end{pmatrix} \mathbf{x},$$

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}, \quad \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 6 & -4 & 4 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \frac{\exp(t)}{1+t^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 0 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 3 \\ -2 & 8 & 5 \\ -1 & 1 & 7 \end{pmatrix} \mathbf{x},$$

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 7 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 7 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \exp(t) \begin{pmatrix} -13 \\ -16 \\ -32 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 \\ -15 & 7 & 3 \\ -7 & 2 & 4 \end{pmatrix} \mathbf{x}, \quad \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 6 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x}.$$

2) Calcular la solución de los siguientes problemas de valores iniciales:

a)

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

b)

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 14 & 6 & 9 \\ -38 & -15 & -36 \\ 2 & 0 & 9 \end{pmatrix} \mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/3 \end{pmatrix}.$$

3) Calcular las soluciones generales de los siguientes sistemas lineales con coeficientes constantes

$$\mathbf{x}' = \mathbf{Ax} + \mathbf{b}(t),$$

donde la matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ y la función vectorial $\mathbf{b} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^4$ están dados respectivamente por:

1-1)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}(t) = \begin{pmatrix} t+1 \\ t-1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1-2)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}(t) = (e^t + \cos t) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1-3)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

1-4)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}(t) = e^{3t} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1-5)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} t+1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1-6)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -3 & -2 \\ 0 & 4 & -1 & -2 \\ 0 & 10 & -5 & -3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}(t) = e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

1-7)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & -3 \\ 1 & 8 & -1 & -5 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ e^{4t} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

1-8)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1-9)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}(t) = \begin{pmatrix} \sin t + \cos t \\ 0 \\ 0 \\ -\sin t + \cos t \end{pmatrix}.$$

4) Resuelve el siguiente sistema lineal homogéneo

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x}.$$

y encuentra los subespacios bidimensionales $S \subset \mathbb{R}^4$ invariantes por el flujo del espacio fásico, es decir tales que si $\mathbf{x}(t_0) \in S$ para algún t_0 entonces $\mathbf{x}(t) \in S$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

5) Dada la ecuación lineal

$$y'(x) = -ay(x) + q(x), \tag{1}$$

donde $a > 0$ es constante y q es una función continua en $[0, +\infty)$ tal que existe

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} q(x) = b.$$

Probar que para toda condición inicial $y(0) = y_0$, la única solución de (1) definida para todo $x \geq 0$ verifica

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = \frac{b}{a} \tag{2}$$

6) Dado el sistema lineal $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$, con

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

- i) ¿Cuántas soluciones periódicas linealmente independientes tiene ?
ii) ¿Son periódicas todas las soluciones ?
-

7) Dados los vectores de \mathbb{R}^3

$$\mathbf{u}_1 = (1, 1, 0)^T, \mathbf{u}_2 = (0, 1, 1)^T, \mathbf{u}_3 = (1, 1, 1)^T,$$

- (a) Determinar $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ tal que las soluciones $\varphi(t)$ del sistema lineal homogéneo de coeficientes constantes $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ satisfagan:
(i) Si $\varphi(0) \in \mathbb{R}^3$ se encuentra en el subespacio engendrado por \mathbf{u}_1 y \mathbf{u}_2 entonces existe

$$\lim_{|t| \rightarrow +\infty} \varphi(t)$$

- (ii) Si $\varphi(0) = \mathbf{u}_3$ entonces existe

$$\lim_{|t| \rightarrow +\infty} \exp(-2t)\varphi(t).$$

- (b) Calcula una solución particular del sistema lineal

$$x' = \mathbf{A}x + (t^2, t, 1)^T.$$

8) Sea φ la solución de la ecuación diferencial de orden n con coeficientes constantes

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \dots + a_0x = 0,$$

que verifica las condiciones iniciales

$$x(0) = x'(0) = \dots = x^{(n-2)}(0) = 0, \quad x^{(n-1)}(0) = 1.$$

Demostrar que $\varphi, \varphi', \dots, \varphi^{(n-1)}$ es un sistema fundamental de soluciones de dicha ecuación. ¿ Puede deducirse de lo anterior que toda ecuación de orden n con coeficientes constantes tiene una matriz fundamental simétrica?

9) Resuelve el sistema $\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}(t)$ siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}(t) = e^{3t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

10) Resuelve el sistema $\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}(t)$ siendo

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}(t) = e^{-2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t \\ 1 \end{pmatrix}$$

11) Resuelve el sistema $\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}(t)$ siendo

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 4 \\ -1 & -2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & -4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}(t) = e^{-2t} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

2.2. Sistemas y ecuaciones lineales con coeficientes variables

1) (a) Resolver la ecuación diferencial

$$t(1 - t^2)y'(t) + (2t^2 - 1)y(t) = t^3,$$

analizando separadamente los casos $|t| < 1$ y $|t| > 1$.

(b) Discutir la existencia y unicidad de solución del problema de valor inicial de la ecuación anterior junto a la condición inicial $y(t_0) = y_0$, según los valores de t_0, y_0 . ¿Qué condiciones deben imponerse sobre t_0, y_0 para que el correspondiente PVI admita solución global $y \in C^1(\mathbb{R})$.

2) Sea el sistema lineal $\mathbf{y}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{y}$ donde $\mathbf{A}(t)$ es continua en un intervalo J de \mathbb{R} y verifica $\mathbf{A}^*(t) = -\mathbf{A}(t)$, ($\mathbf{A}^* = \bar{\mathbf{A}}^T$). Probar que si una matriz fundamental es unitaria para un punto de J lo es para todo punto de J .

3) Determinar la solución general del sistema

$$\begin{cases} x' = (3t - 1)x - (1 - t)y + t \exp(t^2) \\ y' = -(t + 2)x + (t - 2)y - \exp(t^2) \end{cases}$$

sabiendo que el sistema homogéneo tiene una solución de la forma

$$(x(t), y(t)) = (\phi(t), -\phi(t)).$$

4) Sea la ecuación lineal homogénea de segundo orden con coeficientes variables

$$L(x) = a_0(t) x'' + a_1(t) x' + a_2(t) x = 0, \quad (1)$$

donde $a_0(t) \neq 0, t \in J, a_i(t) \in C(J)$, J intervalo de \mathbb{R} y supongamos que $\varphi(t)$ es una solución de (1) tal que $\varphi(t) \neq 0$ en J . Verificar que el cambio $x \rightarrow y$ dado por $x = y\varphi(t)$, permite reducir la resolución de la ecuación (1) a otra de primer orden mas una cuadratura. Calcular una segunda solución de (1) linealmente independiente de $\varphi(t)$.

5) Sabiendo que la ecuación $(t^2 - 1)x'' - 2tx' + 2x = 0$ tiene la solución $x(t) = t^2 + 1$. Hallar su solución general.

6) Calcular la solución general de $(\sin^2 t) y'' - 2 \sin t \cos t y' + (1 + \cos^2 t) y = 0$, sabiendo que la razón de dos soluciones independientes es t .

7) Calcular la solución general de $t^2 y'' - t(t+2)y' + (t+2)y = 0$, sabiendo que tiene dos soluciones particulares cuyo cociente es e^t .

8) Dada la ecuación de segundo orden $y'' - t^{-1}y' + f(t)y = 0$. Hallar f de tal manera que existan dos soluciones tales que una sea el cuadrado de la otra.

9) Calcular la solución general de la ecuación

$$t^2 x'' - 2x = t^3 e^t. \quad (1)$$

2.3. Sistemas lineales con coeficientes periódicos (Teoría de Floquet)

1) Probar que si λ es un multiplicador asociado a un sistema lineal con coeficientes periódicos de periodo τ , existe un exponente característico μ tal que $\exp(\tau\mu) = \lambda$ y recíprocamente.

2) Probar que si λ es un multiplicador real del sistema τ -periódico $\mathbf{y}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{y}$ existe al menos una solución $\varphi(t)$ tal que $\varphi(t + \tau) = \lambda\varphi(t)$.

3) Sea $\mathbf{Y}(t)$ matriz fundamental unidad de $\mathbf{y}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{y}$ donde $\mathbf{A}(t)$ es τ -periódica. Probar que existen $n - r$ soluciones periódicas linealmente independientes si y solo si $\text{rang}(\mathbf{Y}(\tau) - \mathbf{I}) = r$.

4) Dado el sistema lineal

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 3 \operatorname{sen}^2 t - 1 & 3 \operatorname{sen} t \cos t + 1 \\ 3 \operatorname{sen} t \cos t - 1 & 3 \cos^2 t - 1 \end{pmatrix} \mathbf{x} \quad (1)$$

- i) Sin integrar, probar que existe al menos una solución no acotada para $t \rightarrow +\infty$.
- ii) Sabiendo que (1) tiene la solución particular $\mathbf{x}(t) = e^{2t} (\operatorname{sen} t, \cos t)^T$ resolver explícitamente el sistema.

5) Dado el sistema lineal

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 - \cos t & 0 \\ \cos t & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

escribir la solución general en la forma de Floquet. ¿Cuales son los multiplicadores y los exponentes característicos ?.

6) Se considera el sistema lineal con coeficientes periódicos

$$\mathbf{x}' = (1 + \cos t) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{x} \quad (1)$$

- i) Calcular los multiplicadores asociados al sistema (1).
 - ii) Determinar las matrices $\Omega(t)$ y Q de la descomposición de Floquet $\Phi(t) = \Omega(t) \exp(tQ)$, donde $\Phi(t)$ es matriz fundamental de (1), Q es constante y $\Omega(t)$ es 2π -periódica.
 - iii) Estudiar la existencia de soluciones periódicas.
-

7) Sea $\varphi(t)$ una función real continua y ω -periódica.
Probar que

$$\Phi(t) = \int_0^t \varphi(s) ds$$

se puede expresar en la forma $\Phi(t) = \Psi(t) + \alpha t$, donde $\Psi(t)$ es ω -periódica y α es constante.

Aplicar el apartado anterior para dar una matriz fundamental del sistema lineal

$$\mathbf{x}' = \varphi(t)\mathbf{A}\mathbf{x} \quad (1)$$

donde \mathbf{A} es una matriz constante y $\varphi(t)$ es continua y ω -periódica. Expresar dicha matriz fundamental en la forma de Floquet. ¿ Calcular los exponentes característicos?

8) Sea $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ sistema no lineal autónomo que tiene la solución particular $\mathbf{x} = \varphi(t) \in C^2(J)$ con J intervalo de \mathbb{R} .

Probar que $\varphi'(t)$ verifica la ecuación variacional respecto a la solución $\varphi(t)$.

Suponiendo que $\varphi(t)$ es periódica de periodo τ . Probar que la ecuación variacional tiene al menos un multiplicador unidad.

9) Sea la ecuación

$$x'' + (x^2 + x'^2 - 1)x' + x = 0. \quad (1)$$

Sabiendo que tiene la solución periódica $x = \sin t$ escribir el sistema variacional correspondiente a esta solución periódica y calcular sus multiplicadores.

10) Hallar la solución general del sistema

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} \sin t & \sin 2t \\ 0 & \cos t \end{pmatrix} \mathbf{x},$$

y con la correspondiente matriz fundamental $\mathbf{X}(t)$, obtener una descomposición de la forma $\mathbf{X}(t) = \Omega(t) \exp(tQ)$ con Q constante y Ω periódica.

11) Las mismas cuestiones que en el ejercicio anterior para las sistemas de ecuaciones

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ \operatorname{sen} t & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x} \quad (1)$$

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -1 + \cos t & 0 \\ \cos t & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x} \quad (2)$$

12) Consideremos la ecuación de segundo orden

$$x'' + a_1(t)x' + a_2(t)x = 0 \quad (1)$$

donde $a_1(t)$ y $a_2(t)$ son continuas en R y periódicas de periodo ω . Sean $\varphi_1(t), \varphi_2(t)$ soluciones de (1) tales que

$$\varphi_1(0) = 1, \quad \varphi_1'(0) = 0, \quad \varphi_2(0) = 0, \quad \varphi_2'(0) = 1$$

Escribir la ecuación de segundo orden (1) como sistema de primer orden y probar que los multiplicadores son las raíces de

$$\lambda^2 - \alpha\lambda + \beta = 0$$

donde

$$\alpha = \varphi_1(\omega) + \varphi_2'(\omega), \quad \beta = \exp\left(-\int_0^\omega a_1(t)dt\right)$$

Se considera ahora $a_1 = 0$. Probar que si $|\alpha| < 2$ los multiplicadores son complejos conjugados de modulo 1 y todas las soluciones están uniformemente acotadas en R .

Con las mismas hipótesis de 2). Probar que si $|\alpha| > 2$ ninguna solución de la ecuación puede estar uniformemente acotada en toda la recta real.

13) Sea el sistema periódico bidimensional

$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} \operatorname{sen}^2 t & \operatorname{sen} t \cos t + 1 \\ \operatorname{sen} t \cos t - 1 & \cos^2 t \end{pmatrix} \mathbf{y} \quad (1)$$

Sabiendo que $\mathbf{y}(t) = (\cos t, -\operatorname{sen} t)^T$ es solución de (1), calcular una segunda solución independiente.

Escribir la matriz fundamental $\mathbf{Y}(t)$ obtenida con las dos soluciones anteriores en la forma de Floquet. Verificar que la matriz \mathbf{C} tal que $\mathbf{Y}(\pi) = \mathbf{Y}(0)\mathbf{C}$, no se puede poner en la forma

$$\mathbf{C} = \exp(\pi\mathbf{Q}),$$

con \mathbf{Q} real, pero en cambio \mathbf{C}^2 sí puede escribirse en la forma

$$\mathbf{C}^2 = \exp(2\pi\mathbf{Q}),$$

con \mathbf{Q} real.

14) Sea el sistema lineal

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{b}(t), \quad (1)$$

donde $\mathbf{A} \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{m \times m})$, $\mathbf{b} \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$ y τ -periódicas es decir

$$\mathbf{A}(t) = \mathbf{A}(t + \tau), \quad \mathbf{b}(t) = \mathbf{b}(t + \tau), \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Sea $\Phi(t)$ matriz fundamental de (1) en $t = 0$.

Probar que (1) tiene una solución τ -periódica si y solo si la aplicación $T : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$

$$T(\mathbf{y}) = \Phi(\tau)\mathbf{y} + \boldsymbol{\eta} \quad (2)$$

donde

$$\boldsymbol{\eta} = \int_0^\tau \Phi(\tau)\Phi^{-1}(s)\mathbf{b}(s)ds$$

tiene un punto fijo.

Como consecuencia del apartado anterior, véase que si $\Phi(\tau)$ no tiene un valor propio unidad el sistema (1) tiene una solución τ -periódica.

Sea el caso particular $\mathbf{A}(t) = \mathbf{A}$ constante y supongamos que dicha matriz no tiene autovalores imaginarios puros. Entonces $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}(t)$ tiene una única solución periódica.

Sea $\xi(t) = \mathbf{x}(t; 0, \mathbf{y})$ solución de (1). Véase que para $k = 1, 2, \dots$

$$\xi((k+1)\tau) = \Phi(\tau)\xi(k\tau) + \boldsymbol{\eta} \quad (3)$$

y por tanto

$$\xi((k+1)\tau) = \Phi^{k+1}(\tau)\mathbf{y} + \sum_{j=0}^k \Phi^j(\tau)\boldsymbol{\eta} \quad (4)$$

Véase que si existe $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^m$ tal que

$$\mathbf{z}^T \Phi(\tau) = \mathbf{z}^T, \quad \mathbf{z}^T \eta \neq 0$$

la solución $\xi(t)$ es no acotada. Como consecuencia de este resultado probar que (1) tiene una solución periódica si y solo si tiene una solución uniformemente acotada.

2.4. Sistemas lineales matriciales

1) Probar que si B conmuta con A ,

- B conmuta con $\exp(tA)$.
 - $\exp(A + B) = \exp(A) \exp(B) = \exp(B) \exp(A)$.
 - $(A + B)^n = \binom{n}{0} A^n + \binom{n}{1} A^{n-1} B + \binom{n}{2} A^{n-2} B^2 + \dots + \binom{n}{n} B^n$.
-

2) Probar que la solución de

$$y'(t) = Ay(t), \quad y(t_0) = y_0 \in \mathbb{R}^m$$

es $y(t) = \exp[(t - t_0)A] y_0$.

3) Sean a, b y c constantes reales no simultáneamente nulas.

i) Prueba que el polinomio mínimo de

$$A = \begin{pmatrix} 0 & c & -b \\ -c & 0 & a \\ b & -a & 0 \end{pmatrix}$$

es $\lambda^3 + \mu^2 \lambda = 0$ donde $\mu^2 = a^2 + b^2 + c^2$.

ii) Demuestra que

$$\exp[tA] = I + \frac{\operatorname{sen}(t\mu)}{\mu}A + \frac{(1 - \cos(t\mu))}{\mu^2}A^2.$$

4) Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ -4 & 3 & 3 \\ 7 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

Calcula $\exp(A)$ y A^{100} .

5) (Cálculo de $\exp(tA)$ por el método de Putzer) Sea $P(z) = (z - \lambda_1)(z - \lambda_2) \dots (z - \lambda_q)$ el polinomio mínimo de una matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ donde los valores propios λ_i están repetidos tantas veces como indica su multiplicidad en el polinomio mínimo y sean

$$P_0(z) = 1, P_1(z) = (z - \lambda_1), P_2(z) = (z - \lambda_1)(z - \lambda_2), \dots$$

i) Prueba que $P_0(A), P_1(A), \dots, P_{q-1}(A)$ son linealmente independientes en el conjunto de matrices reales $m \times m$.

ii) Teniendo en cuenta que $P(A) = P_q(A) = 0$ toda potencia A^k con $k \geq 0$ puede escribirse como combinación lineal de $P_0(A), \dots, P_{q-1}(A)$

iii) Por tanto, sustituyendo $A^k, k \geq 0$ en función de $P_0(A), P_1(A), \dots, P_{q-1}(A)$ en el desarrollo de la exponencial $\exp(tA)$, se llega a una expresión de la forma

$$\exp[tA] = r_1(t)P_0(A) + r_2(t)P_1(A) + \dots + r_q(t)P_{q-1}(A),$$

con ciertas funciones reales $r_i(t)$.

iv) Teniendo en cuenta que

$$A P_j(A) = P_{j+1}(A) + \lambda_{j+1}P_j(A), \quad j = 0, \dots, q-1$$

Demuestra que dichas funciones verifican

$$\begin{pmatrix} r_1' \\ r_2' \\ \vdots \\ r_q' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ \dots & \dots & 1 & \lambda_q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_q \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} r_1(0) \\ r_2(0) \\ \vdots \\ r_q(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

v) Aplicaremos el método de Putzer al cálculo de $\exp(tA)$ donde A está dada por

$$A = \begin{pmatrix} -7 & 21 & 18 \\ -15 & 29 & 18 \\ 5 & -7 & 2 \end{pmatrix}$$

Primero calculamos el polinomio característico

$$p_{car}(\lambda) = \det(\lambda I - A) = (\lambda - 8)^3$$

El polinomio mínimo es divisor del polinomio característico, por tanto será de la forma $P(z) = (z - 8)^q$ con $q \leq 3$. Para decidir el valor de q miraremos la dimensión del $\ker (A - 8I)$. Puesto que

$$A - 8I = \begin{pmatrix} -15 & 21 & 18 \\ -15 & 21 & 18 \\ 5 & -7 & -6 \end{pmatrix}$$

vemos que solo hay una fila independiente luego $\dim \ker (A - 8I) = 2$, lo que implica que hay dos vectores propios independientes y por tanto dos cajas de Jordan de tamaño 2 y 1. En consecuencia el polinomio mínimo es $P(z) = (z - 8)^2$.

Con las notaciones anteriores

$$P_0(z) = 1, \quad P_1(z) = z - 8$$

Las funciones $r_1(t)$ y $r_2(t)$ verifican

$$r_1' = 8r_1, \quad r_1(0) = 1 \quad \implies r_1(t) = e^{8t}.$$

$$r_2' = r_1 + 8r_2 = e^{8t} + 8r_2, \quad r_2(0) = 0$$

La solución general de la ecuación anterior

$$r_2(t) = r_{2h}(t) + r_{2p}(t) = Ce^{8t} + te^{8t}$$

por la condición inicial $C = 0$, luego $r_2(t) = te^{8t}$

En definitiva

$$\exp[tA] = r_1(t)P_0(A) + r_2(t)P_1(A) = e^{8t}I + (te^{8t})(A - 8I)$$

2.5. Métodos operacionales en ecuaciones lineales

1) Sea $L(z) = z^m + a_{m-1}z^{m-1} + \dots + a_1z + a_0$ tal que $a_0 \neq 0$. Prueba (por inducción en el grado de $L(z)$) que para todo polinomio $p_n(t)$ de grado n , la ecuación lineal de coeficientes constantes

$$L(D) x(t) = p_n(t), \quad (D = d/dt)$$

posee una única solución particular $x_p(t)$ polinómica del mismo grado n .

2) Sea $L(z) = z^m + a_{m-1}z^{m-1} + \dots + a_qz^q$ tal que $a_q \neq 0$. Prueba que para todo polinomio $p_n(t)$ de grado n , la ecuación lineal de coeficientes constantes

$$L(D) x(t) = p_n(t),$$

posee una única solución particular $x_p(t)$ de la forma $x_p(t) = t^q \pi_n(t)$ donde π_n es un polinomio de grado n .

3) Dada la ecuación lineal no homogénea

$$L(D) x \equiv (D^m + a_{m-1}D^{m-1} + \dots + a_0I) x = f(t), \quad (2.1)$$

comprueba que si se aplica el método de variación de las constantes al sistema lineal equivalente a (2.1) se obtiene una solución particular de la forma

$$x_p(t) = u_1(t)\varphi_1(t) + \dots + u_m(t)\varphi_m(t),$$

donde $\langle \varphi_1(t), \dots, \varphi_m(t) \rangle$ es una base de soluciones de $L(D)x = 0$ y las derivadas u'_j de las u_j son soluciones del sistema lineal

$$\begin{pmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \dots & \varphi_m \\ \varphi'_1 & \varphi'_2 & \dots & \varphi'_m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \varphi_1^{m-1} & \varphi_2^{m-1} & \dots & \varphi_m^{m-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u'_1 \\ u'_2 \\ \vdots \\ u'_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(t) \end{pmatrix}$$

Aplica el resultado anterior para calcular la solución general de

$$x'' + x = e^{\text{sen} t}(1 + \cos^2 t - \text{sen} t).$$

4) Calcula la solución general de las siguientes ecuaciones

1. $x'' + x' - 2x = e^{2t} \text{sen}(2t)$

2. $x''' + 2x'' - x = e^{-t} \cos(2t)$

3. $x^{(4)} + 3x'' + 4x = -4e^t(3 \cos(2t) + 5 \text{sen}(2t))$

4. $x^{(4)} + 5x'' + 4x = 2e^t(11 + 14t + 5t^2)$

5. $x^{(4)} + 2x'' + x = \cos t.$