Métodos de Integración

Contenido

1. Introducción

La definición de la integral de una función continua f en un intervalo $[a, b]$ como el límite de las sumas parciales de particiones rectangulares, en símbolos

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i)\Delta x_i\,,$$

no nos provee de un conjunto de reglas operativas para resolver integrales de manera tan precisa como lo son el conjunto de reglas para resolver derivadas. Es el Teorema Fundamental del Cálculo que nos da una mejor heurística para calcular el valor de $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$, la cual es el punto de partida de los métodos expuestos aqui: hállese una función g tal que $g'(x) = f(x)$; luego $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = g(b) - g(a)$. La función g es única salvo constante aditiva y está definida para todos los valores de x donde $f(x)$ está definida. Por todo esto y por ser nuestro objetivo en estas notas elaborar métodos para hallar g, obviaremos los *límites de integración* a y b (por lo que tampoco nos interesará calcular el valor de $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$) y, en general, trabajaremos con la integral indefinida

$$\int f(x)\,dx$$

cuya solución tiene la forma $g(x) + C$, donde g es una función que satisface

$$g'(x) = f(x)$$

(y es esta última condición la que utilizamos para verificar que, en efecto, g es una solución de la integral.)

El proceso de hallar una solución para una integral es lo que se denomina *integrar una función* o simplemente *integración*. En la expresión $\displaystyle\int f(x)\,dx = g(x) + C$, la función $f(x)$ se llama *integrando*, la función $g(x)$ se llama *primitiva* o *antiderivada* de f y C es la *constante de integración*, la cual olvidaremos escribir en general (y muchas veces por razones de espacio). Sin embargo, se debe tener siempre presente que son infinitas las soluciones de una integral indefinida y cualquier par de ellas difieren en una constante.

El símbolo $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ se atribuye a la inventiva de Leibniz (1646–1716), quien quiso representar con éste una suma infinita de rectángulos, cada uno de altura dada por el valor de la función f y base *infinitamente pequeña* o de valor *infinitesimal* dx. El uso que Leibniz dio a estos dx fue más que notacional: él consideró dx como una variable a valores infinitesimales positivos (en el sentido de ser un número positivo menor que cualquier número finito positivo) y operó con éste de igual manera que con cualquier otra cantidad numérica para obtener muchas de las fórmulas del cálculo diferencial e integral que conocemos hoy[1]. Este uso de dx como cantidad infinitesimal, si bien como recurso notacional resulta ser tremendamente clarificador de muchas fórmulas del Cálculo, fue controversial por que en su época, y hasta mediados del siglo XX, careció de fundamentación matemática. Es en el año 1965 cuando se logra reconciliar la consideración de dx como cantidad infinitesimal con el rigor de las matemáticas: el matemático Abraham Robinson (1918–1974) demostró formalmente la posibilidad de extender el conjunto de los números reales a un conjunto que incluya las cantidades infinitas e infinitesimales[2].

En vista de estos resultados podemos tranquilamente considerar dx a la manera de Leibniz, y es así como lo haremos aqui. Esto es, consideramos dx como una variable que toma valores infinitesimales positivos, y su uso en la deducción de fórmulas para integrar queda matemáticamente justificado (por ejemplo, en la sección 3.1 cuando escribimos $du = g'(x)\,dx$, o los du y dv en las integrales por partes en la sección 3.2). Como bono extra, esperamos que del conocimiento de este avance de la matemática moderna, el lector pueda librarse del trauma que le resulta al intentar responder la pregunta: ¿Por qué $\dfrac{dx}{dx} = 1$?[3]. Respuesta: ¡Muy simple! porque se está dividiendo una cantidad infinitesimal no nula por sí misma.

Otro punto que merece ser aclarado es el siguiente. Cuando hablamos de “resolver la integral para una función f”, lo que se está pidiendo en realidad es hallar una primitiva g para f que *se exprese en términos de funciones elementales* (e.g. composiciones finitas de funciones aritméticas, trigonométricas, logarítmicas, exponenciales, radicales y otras de igual estilo). El que esto sea posible no está garantizado por ningún teorema para funciones continuas y, más aún, se ha demostrado que existen funciones continuas elementales que no admiten primitivas en términos elementales; por ejemplo, la función $f(x) = e^{-x^2}$. Estas razones establecen la filosofía directriz de los métodos de integración: se clasifican las funciones conocidas que admiten primitivas elementales en clases según un patrón general que sabemos resolver mediante una operación específica; cualquier otra función que no presente las características de los elementos de alguna de las clases establecidas, se intenta transformar en un elemento de alguna de estas mediante un número finito de manipulaciones. Pero, por lo antes dicho, el éxito de este procedimiento no está garantizado y depende en gran medida de la destreza que sólo se adquiere con la práctica. En este sentido integrar es un arte.

---

[1] Véase la obra de C. Boyer, *The History of the Calculus and its Conceptual Development*, Dover 1959, para un excelente recuento de esta parte de la historia de la matemática.

[2] Ver A. Robinson, *Non-standard Analysis*, North–Holland, Amsterdam, 1966.

[3] Esta es una pregunta que consuetudinariamente me hacen los estudiantes de cálculo.

2. Integrales Simples

Comenzamos con una lista de las funciones que admiten una primitiva simple; estas son las que podemos obtener como una aplicación inmediata del Teorema Fundamental del Cálculo y nada más. (Esto es una verdad a medias: las integrales 12 a 15 no entran dentro de este patrón; pero las incluimos aqui para completar la lista de integrales cuyo integrando es una función simple. En la sección 3.1, ejemplo 3.1.6, daremos una justificación de ellas.)

1. $\int k\,dx = kx + C$, para todo número real k.
2. $\int x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$, para todo número real $\alpha \neq -1$.
3. $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$
4. $\int e^{kx}\,dx = \frac{e^{kx}}{k} + C$, para todo número $k \neq 0$.
5. $\int a^{kx}\,dx = \frac{a^{kx}}{k\ln a} + C$, para $a \neq 1$ y $k \neq 0$.
6. $\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C$.
7. $\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C$
8. $\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C$
9. $\int \csc^2 x\,dx = -\cot x + C$
10. $\int (\sec x)(\tan x)\,dx = \sec x + C$
11. $\int (\csc x)(\cot x)\,dx = -\csc x + C$
12. $\int \tan x\,dx = \ln|\sec x| + C = -\ln|\cos x| + C$
13. $\int \cot x\,dx = -\ln|\csc x| + C = \ln|\operatorname{sen} x| + C$
14. $\int \sec x\,dx = \ln|\sec x + \tan x| + C$
15. $\int \csc x\,dx = -\ln|\csc x + \cot x| + C$
16. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \operatorname{arcsen} x + C = -\arccos x + C$, para $|x| < 1$
17. $\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x + C = -\operatorname{arccot} x + C$

18. $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx = \operatorname{arcsec}|x| + C = -\operatorname{arccsc}|x| + C$, para $|x| > 1$

19. $\int \operatorname{senh} x\,dx = \cosh x + C$

20. $\int \cosh x\,dx = \operatorname{senh} x + C$

21. $\int \operatorname{sech}^2 x\,dx = \tanh x + C$

22. $\int \operatorname{csch}^2 x\,dx = -\coth x + C$

23. $\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \operatorname{arcsenh} + C = \ln(x + \sqrt{1+x^2}\,) + C$

24. $\int \frac{1}{\pm\sqrt{x^2-1}}\,dx = \operatorname{arccosh} x + C = \ln(x \pm \sqrt{x^2-1}\,) + C$, para $|x| > 1$.

25. $\int \frac{1}{1-x^2}\,dx = \begin{cases} \operatorname{arctanh} x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}\ , & \text{si } |x| < 1 \\ \\ \operatorname{arccoth} x = \frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1}\ , & \text{si } |x| > 1 \end{cases}$

Anexo a esta tabla de integrales se tienen las siguientes propiedades de la integral que deben saber manejarse también.

Propiedad 1:

$$\int [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$$

Ejemplo 2.1

$$\int [e^{2x} + x^3]\,dx = \int e^{2x}\,dx + \int x^3\,dx = \frac{e^{2x}}{2} + \frac{x^4}{4} + C$$

Propiedad 2:

$$\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx, \text{ para todo } k \in \mathbb{R}.$$

Ejemplo 2.2

$$\int \frac{3}{1+x^2}\,dx = 3\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = 3\arctan x + C$$

3. Dos Métodos Fundamentales

Los métodos de sustitución e integración por partes son la base de todos los demás métodos. Aquellos son, en esencia, una combinación de uno de estos dos, o ambos, más algún truco algebraico.

3.1 Sustitución o Cambio de Variable

Si una integral tiene la forma

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx$$

el método de sustitución o cambio de variable consiste en tomar

$$u = g(x)$$

de donde

$$du = g'(x)\,dx.$$

Se resuelve $\int f(u)\,du$ y luego de hallada la solución (llamémosla $F(u) + C$) se vuelve a poner todo en términos de x sustituyendo u por $g(x)$; es decir,

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = F(g(x)) + C. \tag{3.1}$$

La justificación de éste método se basa en la regla de la cadena para la derivada de funciones compuestas: Si f y g son derivables y la composición de f con g está bien definida, entonces, si F es una primitiva de f, se tiene

$$(F(g(x)))' = F'(g(x))g'(x) = f(g(x))g'(x),$$

por lo tanto, $F(g(x))$ es una primitiva de $f(g(x))g'(x)$, de donde se obtiene (3.1).

Ejemplo 3.1.1 $\int \sqrt[3]{1 + 3\operatorname{sen} x}\cos x\,dx$. Hacemos la sustitución: $u = 1 + 3\operatorname{sen} x$, y así $du = 3\cos x\,dx$. La integral nos queda:

$$\frac{1}{3}\int u^{\frac{1}{3}}\,du = \frac{1}{4}u^{\frac{4}{3}} + C$$

y, por lo tanto,

$$\int \sqrt[3]{1+3\operatorname{sen} x}\cos x\,dx = \frac{(1+3\operatorname{sen} x)^{\frac{4}{3}}}{4} + C.$$

Ejemplo 3.1.2 $\int \frac{x^3}{\sqrt[5]{x^4+6}}\,dx$. Hacemos la sustitución $u = x^4+6$ y $du = 4x^3\,dx$. Así

$$\int \frac{x^3}{\sqrt[5]{x^4+6}}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{\sqrt[5]{u}}\,du = \frac{1}{4}\int u^{-\frac{1}{5}}\,du = \frac{5}{16}u^{\frac{4}{5}} + C = \frac{5}{16}(x^4+6)^{\frac{4}{5}} + C.$$

Ejemplo 3.1.3 $\int x\sqrt{x-5}\,dx$. Hacemos la sustitución: $u = \sqrt{x-5}$, de donde $x = u^2+5$ y $dx = 2u\,du$. La integral nos queda:

$$\int (u^2+5)u2u\,du \quad = \quad 2\int (u^4+5u^2)\,du = \frac{2}{5}u^5 + \frac{10}{3}u^3 + C.$$

Retornando a la variable x se concluye que

$$\int x\sqrt{x-5}\,dx = \frac{2}{5}(x-5)^{\frac{5}{2}} + \frac{10}{3}(x-5)^{\frac{3}{2}} + C.$$

A continuación tenemos tres fórmulas generales de integración que son consecuencia inmediata del método de sustitución o cambio de variable. (En todos los casos considere $u = f(x)$.)

Fórmula general 1:

$$\int f^n(x)f'(x)\,dx = \frac{f^{n+1}(x)}{n+1} + C, \text{ para } n \neq -1$$

Ejemplo 3.1.4 (a) $\int \operatorname{sen}^3 x\cos x\,dx = \frac{\operatorname{sen}^4 x}{4} + C$

(b) $\int \frac{\operatorname{arcsen} x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int \operatorname{arcsen} x\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{(\operatorname{arcsen} x)^2}{2} + C$

(c) $\int \frac{1}{(\ln^3 x)x}\,dx = \int (\ln^{-3} x)\frac{1}{x}\,dx = \frac{\ln^{-2} x}{-2} + C$

Fórmula general 2:

$$\int e^{f(x)}f'(x)\,dx = e^{f(x)} + C$$

Ejemplo 3.1.5 (a) $\int e^{x^2}x\,dx = \frac{1}{2}\int e^{x^2}2x\,dx = \frac{1}{2}e^{x^2} + C$

(b) $\displaystyle\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = 2\int e^{\sqrt{x}}\frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx = 2e^{\sqrt{x}} + C$

Fórmula general 3:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C$$

Ejemplo 3.1.6 (a) $\displaystyle\int \frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}\,dx = (-1)\int \frac{-e^{-x}}{e^{-x}+1}\,dx = -\ln|e^{-x}+1| + C$

(b) $\displaystyle\int \frac{1+\ln x}{3+x\ln x}\,dx = \int \frac{x\frac{1}{x}+(1)\ln x}{3+x\ln x}\,dx = \ln|3+x\ln x| + C$

(c) $\displaystyle\int \tan x\,dx = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\,dx = (-1)\int \frac{-\operatorname{sen} x}{\cos x}\,dx = -\ln|\cos x| + C$

(De manera análoga se resuelve la integral de $\cot x$.)

(d)

$$\begin{aligned}\int \sec x\,dx &= \int \sec x\frac{\sec x+\tan x}{\sec x+\tan x}\,dx = \int \frac{\sec x\tan x+\sec^2 x}{\sec x+\tan x}\,dx\\ &= \ln|\sec x+\tan x| + C\end{aligned}$$

La solución anterior es la que se enseña con más frecuencia en los cursos de cálculo para la integral de $\sec x$, y es la que más rápidamente se olvida. A mi parecer esto es así porque el truco de multiplicar y dividir el integrando por $\sec x + \tan x$ es muy poco natural. Por eso daré a continuación otra solución más natural de esta integral, aunque tal vez al lector no le resulte en este momento así puesto que se utiliza la siguiente separación de una fracción de polinomios en otras más simples:

$$\frac{1}{(1+a)(1-a)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1-a}\right)$$

Sin embargo, luego de leer el capítulo 6, el lector podrá juzgar mejor sobre la naturalidad de esta solución.

Ejemplo 3.1.7

$$\begin{aligned}\int \sec x\,dx &= \int \frac{1}{\cos x}\,dx = \int \frac{\cos x}{\cos^2 x}\,dx = \int \frac{\cos x}{1-\operatorname{sen}^2 x}\,dx\\ &= \int \frac{\cos x}{(1+\operatorname{sen} x)(1-\operatorname{sen} x)}\,dx = \frac{1}{2}\int\left(\frac{\cos x}{1+\operatorname{sen} x} + \frac{\cos x}{1-\operatorname{sen} x}\right)dx\\ &= \frac{1}{2}(\ln|1+\operatorname{sen} x| - \ln|1-\operatorname{sen} x|) + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x}\right| + C\\ &= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x}\cdot\frac{1+\operatorname{sen} x}{1+\operatorname{sen} x}\right| + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{(1+\operatorname{sen} x)^2}{1-\operatorname{sen}^2 x}\right| + C\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{(1+\operatorname{sen} x)^2}{\cos^2 x}\right| + C = \ln\left|\frac{1+\operatorname{sen} x}{\cos x}\right| + C \\
&= \ln|\sec x + \tan x| + C.
\end{aligned}$$

Una nota histórica: Esta última solución de la integral de la secante apareció publicada por primera vez en la obra *Geometrical Lectures* de Isaac Barrow (1630–1677). El interés suscitado en la época de Barrow por resolver esta integral se debió a su utilidad en el trazado de mapas geográficos, descubierta por Edward Wright (1561–1615), quien determinó que para trazar con exactitud en un mapa el paralelo de latitud θ, se debe tomar como distancia de este al ecuador la integral de la secante de θ. [1]

Ejercicio 3.1.1 Halle las primitivas de cosecante y cotangente.

3.2 Integración por Partes

La fórmula de derivación para el producto de dos funciones nos proporciona de una fórmula útil para resolver integrales cuyo integrando es el producto de dos funciones de naturaleza distintas. Sean f y g funciones sobre la misma variable x y derivables. Entonces

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x),$$

por lo que fg es una primitiva de $f'g + fg'$; es decir,

$$f(x)g(x) = \int (f(x)g(x))'\,dx = \int f'(x)g(x)\,dx + \int f(x)g'(x)\,dx,$$

de donde se obtiene la siguiente fórmula, que es lo que se conoce como la regla de integración por partes,

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx.$$

Esta fórmula nos dice que la integral de un producto de dos funciones, una $f(x)$ y la otra la derivada de una $g(x)$, no es mas que el producto de f por g menos la integral del producto de la derivada de f por la función g. Una manera de desglosar los cálculos y recordar esta regla de integración consiste en lo siguiente: dado el problema de resolver $\int f(x)g'(x)\,dx$, hacemos

$$\begin{aligned}
u = f(x) \quad &\text{y} \quad dv = g'(x)\,dx, \quad \text{por lo que} \\
du = f'(x)\,dx \quad &\text{y} \quad v = g(x)
\end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}
\int f(x)g'(x)\,dx &= \int u\,dv = u\cdot v - \int v\cdot du \\
&= f(x)\cdot g(x) - \int g(x)f'(x)\,dx
\end{aligned}$$

[1] Ver V. F. Rickey, P. M. Tuchinsky, *An application of geography to mathematics: history of the integral of the secant*, Math. Magazine, 53 **3** (162–166) 1980

Ejemplo 3.2.1 $\int x^2 e^{2x}\,dx$. Hacemos

$$\begin{aligned} u = x^2 \quad &\Rightarrow \quad du = 2x\,dx \\ dv = e^{2x}\,dx \quad &\Rightarrow \quad v = \int e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}e^{2x} \end{aligned}$$

Así

$$\int x^2 e^{2x}\,dx = u \cdot v - \int v \cdot du = \frac{1}{2}x^2 e^{2x} - \int x e^{2x}\,dx$$

Volvemos a integrar por partes $\int x e^{2x}\,dx$ tomando $u = x$ y $dv = e^{2x}\,dx$ (en consecuencia $du = dx$ y $v = \frac{1}{2}e^{2x}$). Tenemos

$$\int x e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}x e^{2x} - \int \frac{1}{2}e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}x e^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} \int x^2 e^{2x}\,dx &= \frac{1}{2}x^2 e^{2x} - \int x e^{2x}\,dx \\ &= e^{2x}\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right) + C \end{aligned}$$

Ejemplo 3.2.2 $\int e^x \cos x\,dx$. Tomemos

$$\begin{aligned} u = \cos x \quad &\Rightarrow \quad du = -\operatorname{sen} x\,dx \\ dv = e^x\,dx \quad &\Rightarrow \quad v = \int e^x\,dx = e^x \end{aligned}$$

Entonces

$$\int e^x \cos x\,dx = e^x \cos x + \int e^x \operatorname{sen} x\,dx$$

Volvemos a integrar por partes $\int e^x \operatorname{sen} x\,dx$ tomando

$$\begin{aligned} u = \operatorname{sen} x \quad &\Rightarrow \quad du = \cos x\,dx \\ dv = e^x\,dx \quad &\Rightarrow \quad v = e^x \end{aligned}$$

para luego obtener

$$\begin{aligned} \int e^x \cos x\,dx &= e^x \cos x + \int e^x \operatorname{sen} x\,dx \\ &= e^x \cos x + e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \cos x\,dx \end{aligned}$$

Hemos obtenido, en el lado derecho de la igualdad, la misma integral que deseábamos calcular pero con signo opuesto. Sumando $\int e^x \cos x\,dx$ a ambos lados de la igualdad y dividiendo entre 2 obtenemos

$$\int e^x \cos x\,dx = \frac{1}{2}e^x(\cos x + \operatorname{sen} x) + C$$

Ejemplo 3.2.3 $\int \cos(\ln x)\, dx$. Sea

$$\begin{aligned} u = \cos(\ln x) \quad &\Rightarrow \quad du = -\frac{1}{x}\operatorname{sen}(\ln x)\, dx \\ dv = dx \quad &\Rightarrow \quad v = x \end{aligned}$$

Luego

$$\int \cos(\ln x)\, dx = x\cos(\ln x) + \int \operatorname{sen}(\ln x)\, dx$$

Integrando nuevamente por partes con $u = \operatorname{sen}(\ln x)$ y $dv = dx$ se obtiene

$$\int \cos(\ln x)\, dx = x\cos(\ln x) + x\operatorname{sen}(\ln x) - \int \cos(\ln x)\, dx$$

Otra vez se presenta el fenómeno que observamos en el ejemplo anterior: aparece en el lado derecho de la igualdad la integral que comenzamos a integrar ... y ya sabemos que hacer. Así,

$$\int \cos(\ln x)\, dx = \frac{1}{2}(x\cos(\ln x) + x\operatorname{sen}(\ln x)) + C.$$

En este momento podríamos preguntarnos si importa cómo se eligen u y dv, cuando se intenta resolver una integral por la fórmula de integración por partes. Si nos tomásemos la molestia de integrar en el ejemplo 3.2.2 tomando $u = e^x$ y $dv = \cos x\, dx$, entonces obtendríamos la misma solución. Intente ahora integrar en el ejemplo 3.2.1 tomando $u = e^x$ y $dv = x^2\, dx$; se verá entonces que el proceso de integración ¡no tiene fin! Para auxiliar al lector en la correcta elección de quién debe ser u y quién dv existen diversos recursos mnemotécnicos en forma de poemas o rezos, para ninguno de los cuales conozco una demostración matemática de su infalibilidad y, por eso, me limitaré a recomendar que use su ingenio y practique el método de integración por partes lo suficiente como para desarrollar su propio criterio de elección.

Un tipo de funciones que invitan a ser integradas por partes son las inversas de funciones trigonométricas y las logarítmicas, ya que sus derivadas son funciones algebraicas.

Ejemplo 3.2.4 En estos ejemplos u es todo el integrando y $dv = dx$.

(a) $\displaystyle\int \arctan x\, dx = x\arctan x - \int \frac{x}{1+x^2}\, dx$ (sustitución $w = 1 + x^2$)
$\displaystyle = x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$

(b) $\displaystyle\int \operatorname{arcsen} x\, dx = x\operatorname{arcsen} x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$ (sustitución $w = 1 - x^2$)
$\displaystyle = x\operatorname{arcsen} x + \sqrt{1-x^2} + C$

(c) $\displaystyle\int \ln x\, dx = x\ln x - \int x\,\frac{1}{x}\, dx = x\ln x - x + C$

4. Integración de Funciones Trigonométricas

En este capítulo estudiaremos métodos para resolver integrales de productos y potencias de funciones trigonométricas. Todos consisten, esencialmente, en el método de sustitución junto con algunas identidades trigonométricas. Las identidades trigonométricas fundamentales que debemos recordar son

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \tag{4.1}$$

$$\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x \quad \text{(seno es una función impar)} \tag{4.2}$$

$$\cos(-x) = \cos x \quad \text{(coseno es una función par)} \tag{4.3}$$

y las identidades de la suma de dos ángulos

$$\operatorname{sen}(x+y) = \operatorname{sen} x \cdot \cos y + \operatorname{sen} y \cdot \cos x \tag{4.4}$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y - \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} y \tag{4.5}$$

Cualquier otra identidad que sea necesaria se deduce a partir de estas, y asi lo veremos en la medida que se necesite. El lector debe esforzarse por aprender la manera de obtener las nuevas identidades a partir de (4.1)–(4.5) en vez de memorizarlas. Por ejemplo (y a manera de calentamiento), las fórmulas para la resta de dos ángulos se pueden deducir asi:

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(x-y) &= \operatorname{sen}(x+(-y)) = \operatorname{sen} x \cdot \cos(-y) + \operatorname{sen}(-y) \cdot \cos x \quad \text{(por (4.4))} \\
&= \operatorname{sen} x \cdot \cos y - \operatorname{sen} y \cdot \cos x \quad \text{(por (4.2) y (4.3))} \\
\text{y} & \\
\cos(x-y) &= \cos(x+(-y)) = \cos x \cdot \cos(-y) - \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen}(-y) \quad \text{(por (4.5))} \\
&= \cos x \cdot \cos y + \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} y \quad \text{(por (4.2) y (4.3))}
\end{aligned}$$

4.1 Integrales de la forma $\int \operatorname{sen}^n x\,dx$ y $\int \cos^n x\,dx$.

Caso 4.1.1 n **es par**. Usamos las identidades

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} \quad \text{y} \quad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} \tag{4.6}$$

las cuales se deducen combinando las identidades:

$$\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x \quad (\text{tome } x = y \text{ en } (4.5)) \text{ y } \quad \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$$

de la siguiente manera

$$\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = (1 - \operatorname{sen}^2 x) - \operatorname{sen}^2 x = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x$$

y

$$\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = 2\cos^2 x - 1.$$

Luego de realizada la sustitución trigonométrica adecuada, se desarrolla el polinomio de senos o cosenos y se resuelven cada uno de los sumandos: los de potencia par por este método y los de potencia impar por el método que se explica en el caso 4.1.2.

Ejemplo 4.1.1

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{sen}^4 x\,dx &= \int (\operatorname{sen}^2 x)^2\,dx = \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 dx \\
&= \frac{1}{4}\int (1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x)\,dx \\
&= \frac{1}{4}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos 2x\,dx + \frac{1}{4}\int \cos^2 2x\,dx \\
&= \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x + \frac{1}{4}\int \frac{1+\cos 4x}{2}\,dx \\
&= \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x + \frac{1}{8}x + \frac{1}{32}\operatorname{sen} 4x + C
\end{aligned}$$

Ejemplo 4.1.2

$$\int \cos^2 x\,dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2}\,dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x + C$$

Caso 4.1.2 ***n* es impar.** Descomponemos la función trigonométrica en dos factores: uno de potencia $n-1$ y el otro de potencia 1. Luego empleamos la identidad $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ y el método de cambio de variable.

Ejemplo 4.1.3

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{sen}^3 x\,dx &= \int \operatorname{sen}^2 x \operatorname{sen} x\,dx = \int (1 - \cos^2 x)\operatorname{sen} x\,dx \\
&= -\cos x - \int \cos^2 x \operatorname{sen} x\,dx
\end{aligned}$$

La última integral la resolvemos con el cambio de variable $u = \cos x$ y $du = -\operatorname{sen} x\,dx$:

$$-\int \cos^2 x \operatorname{sen} x\,dx = \int u^2\,du = \frac{u^3}{3} = \frac{\cos^3 x}{3} + C$$

Así

$$\int \operatorname{sen}^3 x\,dx = -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + C$$

Ejemplo 4.1.4

$$\begin{aligned}\int \cos^5 x\,dx &= \int \cos^4 x \cos x\,dx = \int (1 - \operatorname{sen}^2 x)^2 \cos x\,dx \\ &= \int (1 - 2\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen}^4 x)\cos x\,dx \\ &= \operatorname{sen} x - 2\int \operatorname{sen}^2 x \cos x\,dx + \int \operatorname{sen}^4 x \cos x\,dx\end{aligned}$$

tomando $u = \operatorname{sen} x$ y $du = \cos x\,dx$ concluimos

$$\begin{aligned}\int \cos^5 x\,dx &= \operatorname{sen} x - 2\int u^2\,du + \int u^4\,du \\ &= \operatorname{sen} x - \frac{2}{3}u^3 + \frac{1}{5}u^5 + C \\ &= \operatorname{sen} x - \frac{2}{3}\operatorname{sen}^3 x + \frac{1}{5}\operatorname{sen}^5 x + C\end{aligned}$$

4.2 Integrales de la forma $\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x\,dx$.

Caso 4.2.1 n y m son pares. Utilizamos simultáneamente las dos identidades (4.6) deducidas en 4.1.1 para obtener integrales sólo de cosenos y proceder con cada una con el método que convenga de la sección 4.1.

Ejemplo 4.2.1

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x\,dx &= \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)dx \\ &= \frac{1}{4}\int (1-\cos^2 2x)\,dx = \frac{1}{4}\int dx - \frac{1}{8}\int (1+\cos 4x)\,dx \\ &= \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\operatorname{sen} 4x + C\end{aligned}$$

Ejemplo 4.2.2

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}^2 x \cos^4 x\,dx &= \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 dx \\ &= \frac{1}{8}\int (1-\cos 2x)(1+2\cos 2x+\cos^2 2x)\,dx \\ &= \frac{1}{8}\left(\int dx + \int \cos 2x\,dx - \int \cos^2 2x\,dx - \int \cos^3 2x\,dx\right) \\ &= \frac{1}{8}\left(x + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x - \int \frac{1+\cos 4x}{2}\,dx - \int (1-\operatorname{sen}^2 2x)\cos 2x\,dx\right) \\ &= \frac{1}{16}x - \frac{1}{64}\operatorname{sen} 4x + \frac{1}{48}\operatorname{sen}^3 2x + C.\end{aligned}$$

Observación 4.2.1 Alternativamente estas integrales pueden resolverse expresando seno en términos de coseno (o coseno en términos de seno) mediante la identidad $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$, se transforma así a una suma de integrales de una sola de las funciones trigonométricas que se consideran y se resuelven según los casos de la sección 4.1. En la práctica esto resulta ser más ineficiente que la sustitución simultánea explicada antes, puesto que aumenta las potencias en vez de disminuirlas.

Caso 4.2.2 ***n* o *m* impar.** Se realizan las operaciones expuestas en el caso 4.1.2 para la función de potencia impar.

Ejemplo 4.2.3

$$\begin{aligned}\int \cos^3 x \operatorname{sen}^5 x\,dx &= \int \cos^2 x \cos x \operatorname{sen}^5 x\,dx\\ &= \int (1-\operatorname{sen}^2 x)\cos x \operatorname{sen}^5 x\,dx = \frac{\operatorname{sen}^6 x}{6} - \frac{\operatorname{sen}^8 x}{8} + C\end{aligned}$$

(complete usted los pasos intermedios).

Ejemplo 4.2.4

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}^3 x \cos^2 x\,dx &= \int \operatorname{sen}^2 x \operatorname{sen} x \cos^2 x\,dx\\ &= \int (1-\cos^2 x)\operatorname{sen} x \cos^2 x\,dx = \frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^3 x}{3} + C.\end{aligned}$$

4.3 Integrales de la forma $\int \tan^n x\,dx$.

Para todo $n \geq 2$, realizamos la descomposición

$$\tan^n x = \tan^2 x \tan^{n-2} x,$$

sustituimos $\tan^2 x$ por $\sec^2 x - 1$ y resolvemos por el método de cambio de variable. (Recuerde que $\tan^2 x + 1 = \sec^2 x$, la cual se obtiene dividiendo (4.1) por $\cos^2 x$.)

Ejemplo 4.3.1

$$\begin{aligned}\int \tan^3 x\,dx &= \int \tan^2 x \tan x\,dx = \int (\sec^2 x - 1)\tan x\,dx\\ &= \frac{\tan^2 x}{2} + \ln|\cos x| + C.\end{aligned}$$

Ejemplo 4.3.2

$$\begin{aligned}\int \tan^4 x\,dx &= \int \tan^2 x \tan^2 x\,dx = \int (\sec^2 x - 1)\tan^2 x\,dx\\ &= \int \tan^2 x \sec^2 x\,dx - \int (\sec^2 x - 1)\,dx = \frac{\tan^3 x}{3} - \tan x + x + C.\end{aligned}$$

4.4 Integrales de la forma $\int \sec^n x\,dx$.

Caso 4.4.1 n **es par.** Se realiza la descomposición

$$\sec^n x = \sec^2 x \sec^{n-2} x,$$

se utiliza la identidad $\sec^2 x = \tan^2 x + 1$ y el método de cambio de variable.

Ejemplo 4.4.1

$$\begin{aligned}\int \sec^4 x\,dx &= \int \sec^2 x \sec^2 x\,dx = \int (1+\tan^2 x)\sec^2 x\,dx\\ &= \int \sec^2 x\,dx + \int \tan^2 x \sec^2 x\,dx = \tan x + \frac{\tan^3 x}{3} + C.\end{aligned}$$

Caso 4.4.2 n **es impar.** Se realiza la descomposición

$$\sec^n x = \sec^2 x \sec^{n-2} x$$

y se integra por partes.

Ejemplo 4.4.2 (La siguiente es una de las integrales más populares en cualquier curso de Cálculo.)

$$\int \sec^3 x\,dx = \int \sec x \sec^2 x\,dx.$$

Sean

$$\begin{aligned} u = \sec x \quad &\Rightarrow \quad du = \sec x \tan x\,dx\\ dv = \sec^2 x\,dx \quad &\Rightarrow \quad v = \tan x\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}\int \sec^3 x\,dx &= \sec x \tan x - \int \tan^2 x \sec x\,dx\\ &= \sec x \tan x - \int (\sec^2 x - 1)\sec x\,dx\\ &= \sec x \tan x - \int \sec^3 x\,dx + \int \sec x\,dx\end{aligned}$$

sumando $\int \sec^3 x\,dx$ a ambos lados de la igualdad y dividiendo entre 2 concluimos:

$$\int \sec^3 x\,dx = \frac{1}{2}(\sec x \tan x + \ln|\sec x + \tan x|) + C.$$

Las integrales de la forma

$$\int \cot^n x\,dx \quad \text{y} \quad \int \csc^n x\,dx$$

se resuelven de manera análoga a los casos 4.3 y 4.4, empleando por supuesto las identidades trigonométricas apropiadas y recordando que

$$(\cot x)' = -\csc^2 x \quad \text{y} \quad (\csc x)' = -\csc x \cot x.$$

Por ejemplo, resuélvase $\int \cot^4 3x\,dx$ y $\int \csc^6 x\,dx$.

Nota: En el capítulo 7 se deduce una fórmula general para $\int \sec^n x\,dx$ utilizando otros métodos.

4.5 Integrales de la forma $\int \tan^m x \sec^n x\,dx$.

Caso 4.5.1 n **es par.** Hacemos la siguiente descomposición

$$\begin{aligned}
\sec^n x &= \sec^{n-2} x \sec^2 x = (\sec^2 x)^{\frac{n-2}{2}} \sec^2 x \\
&= (\tan^2 x + 1)^{\frac{n-2}{2}} \sec^2 x
\end{aligned}$$

y luego realizamos un cambio de variable

$$z = \tan x$$

de manera que la integral original se transforma en una integral polinómica sencilla.

Ejemplo 4.5.1

$$\begin{aligned}
\int \tan^2 x \sec^4 x\,dx &= \int \tan^2 x \sec^2 x \sec^2 x\,dx \\
&= \int \tan^2 x (\tan^2 x + 1) \sec^2 x\,dx.
\end{aligned}$$

Sea $z = \tan x$, por lo tanto, $dz = \sec^2 x\,dx$. Entonces,

$$\begin{aligned}
\int \tan^2 x \sec^4 x\,dx &= \int z^2 (z^2+1)\,dz = \frac{z^5}{5} + \frac{z^3}{3} + C \\
&= \frac{\tan^5 x}{5} + \frac{\tan^3 x}{3} + C.
\end{aligned}$$

Caso 4.5.2 m **es impar.** Hacemos la siguiente descomposición

$$\begin{aligned}
\tan^m x \sec^n x &= \tan^{m-1} x \sec^{n-1} x \tan x \sec x \\
&= (\tan^2 x)^{\frac{m-1}{2}} \sec^{n-1} x \tan x \sec x \\
&= (\sec^2 x - 1)^{\frac{m-1}{2}} \sec^{n-1} x \tan x \sec x
\end{aligned}$$

y luego realizamos un cambio de variable

$$u = \sec x$$

de manera que la integral original se transforma en una integral polinómica sencilla.

Ejemplo 4.5.2

$$\begin{aligned}\int \tan^3 x \sec^3 x\, dx &= \int \tan^2 x \sec^2 x \tan x \sec x\, dx\\ &= \int (\sec^2 x - 1) \sec^2 x \tan x \sec x\, dx.\end{aligned}$$

Sea $u = \sec x$; por lo tanto $du = \sec x \tan x\, dx$. Luego

$$\begin{aligned}\int \tan^3 x \sec^3 x\, dx &= \int (u^2-1)u^2 du = \frac{u^5}{5} - \frac{u^3}{3} + C\\ &= \frac{\sec^5}{5} - \frac{\sec^3 x}{3} + C.\end{aligned}$$

Caso 4.5.3 n **es impar y** m **es par.** Expresamos la integral original en términos de $\sec x$ sólamente por medio de la transformación

$$\tan^m x = (\tan^2 x)^{\frac{m}{2}} = (\sec^2 x - 1)^{\frac{m}{2}}$$

para luego resolver por el método de integración por partes como se hizo en 4.4.2.

Ejemplo 4.5.3

$$\begin{aligned}\int \tan^2 x \sec x\, dx &= \int (\sec^2 x - 1)\sec x\, dx = \int \sec^3 x\, dx - \int \sec x\, dx\\ &= \frac{1}{2}(\sec x \tan x + \ln|\sec x + \tan x|) - \ln|\sec x + \tan x| + C\\ &= \frac{1}{2}(\sec x \tan x - \ln|\sec x + \tan x|) + C.\end{aligned}$$

Ejercicio 4.5.1 Resolver $\int \tan^4 x \sec^3 x\, dx$.

4.6 Integrales de la forma $\int \operatorname{sen} nx \cos mx\, dx$ con $n \neq m$.

Utilizamos la identidad

$$\operatorname{sen} nx \cos mx = \frac{1}{2}(\operatorname{sen}(n+m)x + \operatorname{sen}(n-m)x)$$

la cual se obtiene al sumar las identidades

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(n+m)x &= \operatorname{sen} nx \cos mx + \operatorname{sen} mx \cos nx\\ \operatorname{sen}(n-m)x &= \operatorname{sen} nx \cos mx - \operatorname{sen} mx \cos nx.\end{aligned}$$

Ejemplo 4.6.1

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen} 4x \cos 5x\, dx &= \int \frac{1}{2}(\operatorname{sen} 9x + \operatorname{sen}(-1)x)\, dx \\ &= \frac{1}{2}\left(\cos x - \frac{\cos 9x}{9}\right) + C.\end{aligned}$$

4.7 Integrales de la forma $\int \operatorname{sen} nx \operatorname{sen} mx\, dx$ o $\int \cos nx \cos mx\, dx$ con $n \neq m$.

Utilizamos las identidades

$$\operatorname{sen} nx \operatorname{sen} mx = \frac{1}{2}(\cos(n-m)x - \cos(n+m)x) \tag{4.7}$$

$$\cos nx \cos mx = \frac{1}{2}(\cos(n-m)x + \cos(n+m)x). \tag{4.8}$$

las cuales se obtienen de las identidades básicas

$$\cos(n+m)x = \cos nx \cos mx - \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx \tag{4.9}$$

$$\cos(n-m)x = \cos nx \cos mx + \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx. \tag{4.10}$$

Sumando (4.9) + (4.10) obtenemos (4.8), restando (4.10) − (4.9) obtenemos (4.7).

Ejemplo 4.7.1

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen} 10x \operatorname{sen} 2x\, dx &= \int \frac{1}{2}(\cos 8x - \cos 12x)\, dx \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\operatorname{sen} 8x}{8} - \frac{\operatorname{sen} 12x}{12}\right) + C.\end{aligned}$$

Ejemplo 4.7.2

$$\begin{aligned}\int \cos(-5)x \cos 3x\, dx &= \int \frac{1}{2}(\cos(-2)x + \cos 8x)\, dx \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\operatorname{sen} 2x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 8x}{8}\right) + C.\end{aligned}$$

5. Integración por Sustituciones Trigonométricas

Si un integrando contiene una expresión de la forma

$$\sqrt{a^2 - b^2x^2}\ ,\ \sqrt{a^2 + b^2x^2}\ \text{ o }\ \sqrt{b^2x^2 - a^2}$$

donde $a > 0$ y $b > 0$, una sustitución trigonométrica adecuada transforma la integral original en una que contiene funciones trigonométricas, más fácil de resolver en general. Las sustituciones adecuadas son:
Si se tiene

(i) $\sqrt{a^2 - b^2x^2}$ hacemos $x = \frac{a}{b}\operatorname{sen} t$;

(ii) $\sqrt{a^2 + b^2x^2}$ hacemos $x = \frac{a}{b}\tan t$;

(iii) $\sqrt{b^2x^2 - a^2}$ hacemos $x = \frac{a}{b}\sec t$.

Para devolver el cambio hacemos uso de la definición geométrica de las funciones trigonométricas: en un triángulo rectángulo si t es la medida del ángulo de uno de los catetos a la hipotenusa, entonces $\operatorname{sen} t = \dfrac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$, $\cos t = \dfrac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$, y las demás funciones trigonométricas se definen combinando adecuadamente estas dos (e.g. $\tan t = \dfrac{\operatorname{sen} t}{\cos t} = \dfrac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$). Los detalles se ilustran en los siguientes ejemplos.

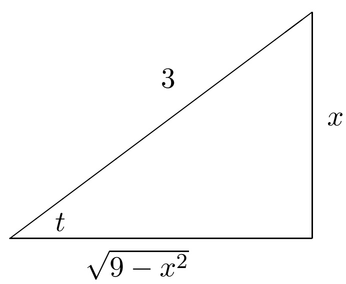
Ejemplo 5.1

$$\int \frac{\sqrt{9 - x^2}}{x}\, dx.$$

Sea $x = 3\operatorname{sen} t$; en consecuencia, $dx = 3\cos t\, dt$. Luego,

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{9 - x^2}}{x}\, dx &= \int \frac{\sqrt{9 - 9\operatorname{sen}^2 t}}{3\operatorname{sen} t} 3\cos t\, dt \\
&= 3\int \frac{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 t}}{\operatorname{sen} t}\cos t\, dt = 3\int \frac{\cos^2 t}{\operatorname{sen} t}\, dt \\
&= 3\int \frac{1 - \operatorname{sen}^2 t}{\operatorname{sen} t}\, dt = 3\int (\csc t - \operatorname{sen} t)\, dt \\
&= 3(\cos t - \ln|\csc t + \cot t|) + C.
\end{aligned}$$

Ahora retornamos a la variable original de la siguiente manera: Si $x = 3\,\mathrm{sen}\,t$ entonces $\frac{x}{3} = \mathrm{sen}\,t$; por lo tanto, en un triángulo rectángulo con uno de sus ángulos de medida t el cateto opuesto al ángulo t tiene longitud x y la hipotenusa longitud 3. El otro cateto, de acuerdo con el Teorema de Pitágoras, es entonces $\sqrt{9-x^2}$. Así se tiene la siguiente figura:



Este es el *triángulo corrrespondiente a la ecuación* $x = 3\,\mathrm{sen}\,t$. A partir de éste se deducen las siguientes igualdades: $\cos t = \frac{\sqrt{9-x^2}}{3}$, $\csc t = \frac{3}{x}$ y $\cot t = \frac{\sqrt{9-x^2}}{x}$. Concluimos entonces que

$$\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x}\,dx = 3\left(\frac{\sqrt{9-x^2}}{3} - \ln\left|\frac{3}{x} + \frac{\sqrt{9-x^2}}{x}\right|\right) + C.$$

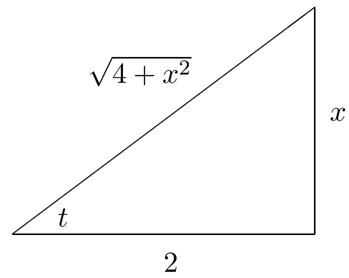
Ejemplo 5.2

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{4+x^2}}.$$

Sea $x = 2\tan t$; en consecuencia, $dx = 2\sec^2 t dt$. Luego,

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{x\sqrt{4+x^2}} &= \frac{1}{2}\int \frac{\sec^2 t dt}{\tan t\sqrt{1+\tan^2 t}} \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{\sec t}{\tan t} dt = \frac{1}{2}\int \csc t dt \\
&= -\frac{1}{2}\ln|\csc t + \cot t| + C.
\end{aligned}$$

Retornamos a la variable original: si $x = 2\tan t$ entonces $\frac{x}{2} = \tan t$. El triángulo correspondiente a esta ecuación es



por lo tanto $\csc t = \frac{\sqrt{4+x^2}}{x}$ y $\cot t = \frac{2}{x}$. Finalmente,

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{4+x^2}} = -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{4+x^2}}{x}+\frac{2}{x}\right| + C.$$

Ejemplo 5.3

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-25}}.$$

Sea $x = 5\sec t$, entonces $dx = 5\sec t\tan t\,dt$. Así

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-25}} &= \int \frac{5\sec t\tan t}{\sqrt{25\sec^2 t - 25}}\,dt\\ &= \int \sec t\,dt = \ln|\sec t + \tan t| + C.\end{aligned}$$

Volvemos a la variable original: si $x = 5\sec t$ entonces $\frac{x}{5} = \sec t$. Por otra parte, $\tan^2 t = \sec^2 t - 1 = \frac{x^2}{25} - 1$. Por lo tanto,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-25}} = \ln\left|\frac{x}{5} + \frac{\sqrt{x^2-25}}{5}\right| + C.$$

(Observe que no fue necesario dibujar el triángulo rectángulo correspondiente a la ecuación $x = 5\sec t$ para expresar la solución final en términos de la variable x; simplemente utilizamos una conocida identidad que relaciona la tangente con la secante. Debe entonces quedar claro que dibujar el triángulo, correspondiente a la sustitución trigonométrica realizada, es un artificio eficaz pero no único y, a veces, no es el mejor auxilio para devolver los cambios.)

Si la expresión en el radical es un polinomio de segundo grado, ax^2+bx+c, lo transformamos en una resta de cuadrados mediante la completación de cuadrados:

$$ax^2+bx+c = \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right).$$

Ejemplo 5.4

$$\int \sqrt{3-2x-x^2}\, dx.$$

Completamos cuadrados:

$$-x^2-2x+3=-(x^2+2x-3)=-((x+1)^2-4)=4-(x+1)^2$$

Por lo tanto,

$$\int \sqrt{3-2x-x^2}\, dx = \int \sqrt{4-(x+1)^2}\, dx$$

y esta última tiene la forma de las integrales estudiadas previamente. Hacemos la sustitución

$$x+1=2\operatorname{sen}\theta \ \Rightarrow dx = 2\cos\theta\, d\theta.$$

Luego,

$$\begin{aligned}\int \sqrt{4-(x+1)^2}\, dx &= \int \sqrt{4-4\operatorname{sen}^2\theta}2\cos\theta\, d\theta \\ &= 4\int \cos^2\theta\, d\theta = 2\int(1+\cos 2\theta)d\theta = 2\theta + \operatorname{sen} 2\theta + C.\end{aligned}$$

Regresamos a la variable original. Tenemos $\operatorname{sen}\theta = \frac{x+1}{2}$, por lo que $\theta = \operatorname{arcsen}\left(\frac{x+1}{2}\right)$. Por otra parte, $\operatorname{sen} 2\theta = 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta$ y

$$\cos\theta = \sqrt{1-\operatorname{sen}^2\theta} = \frac{\sqrt{4-(x+1)^2}}{2}$$

(a esta identidad se pudo también haber llegado utilizando el triángulo rectángulo correspondiente a la ecuación $x+1=2\operatorname{sen}\theta$). En consecuencia,

$$\int \sqrt{3-2x-x^2}\, dx = 2\operatorname{arcsen}\left(\frac{x+1}{2}\right)+\frac{1}{2}(x+1)\sqrt{4-(x+1)^2}+C.$$

Ejemplo 5.5

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(5+2x+x^2)^3}}$$

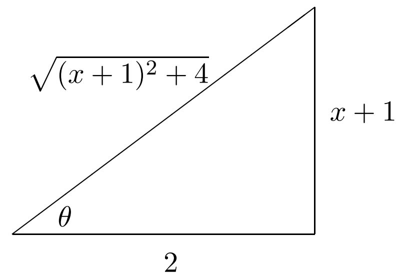
Completamos cuadrados: $x^2+2x+5=(x+1)^2+4$ y trabajamos con la integral

$$\int \frac{dx}{\sqrt{((x+1)^2+4)^3}}$$

Sea $x+1=2\tan\theta$, por lo tanto, $dx=2\sec^2\theta d\theta$. Entonces

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{((x+1)^2+4)^3}} &= \int \frac{2\sec^2\theta}{\sqrt{(4\tan^2\theta+4)^3}}\, d\theta = \frac{1}{4}\int \frac{d\theta}{\sec\theta} \\ &= \frac{1}{4}\int \cos\theta\, d\theta = \frac{1}{4}\operatorname{sen}\theta + C.\end{aligned}$$

Volvemos a la variable original. El triángulo rectángulo correspondiente a la ecuación $\tan\theta = \frac{x+1}{2}$ es



del cual se deduce que $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{x+1}{\sqrt{(x+1)^2+4}}$. Finalmente

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(5+2x+x^2)^3}} = \frac{1}{4}\left(\frac{x+1}{\sqrt{(x+1)^2+4}}\right) + C.$$

6. Integración de Funciones Racionales

Nos ocuparemos ahora de la integral de funciones de la forma $\dfrac{p(x)}{q(x)}$, donde

$$\begin{aligned} p(x) &= x^m + \beta_{m-1}x^{m-1} + \cdots + \beta_0 \ \text{ y} \\ q(x) &= x^n + \alpha_{n-1}x^{n-1} + \cdots + \alpha_0 \ \ (\text{con } \alpha_i, \beta_j \in \mathbb{R}); \end{aligned}$$

es decir, $p(x)$ es un polinomio de grado m y $q(x)$ es un polinomio de grado n. Observe que, en ambos polinomios, se asume el coeficiente del término de mayor grado es 1; esto siempre puede tenerse mediante una simple factorización. Además el caso interesante se presenta cuando $m < n$; porque si $m \geq n$, efectuamos la división de polinomios para expresar $p(x)/q(x)$ como $s(x) + r(x)/t(x)$, donde $r(x)$ es un polinomio de menor grado que $t(x)$.

Para dividir polinomios utilice el método que más le convenga (siempre que sea matemáticamente válido); uno que a mí me agrada consiste en factorizar el denominador y, sucesivamente, construir en el numerador los factores del denominador, uno a uno, haciendo las cancelaciones necesarias, hasta obtener un numerador de menor grado que el denominador. Los siguientes ejemplos sencillos ilustran esta situación.

Ejemplo 6.1 $\displaystyle\int \frac{x}{x+1}\,dx$. Observamos que

$$\frac{x}{x+1} = \frac{x+1-1}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}$$

Por lo tanto,

$$\int \frac{x}{x+1}\,dx = \int dx - \int \frac{dx}{x+1} = x - \ln|x+1| + C$$

Ejemplo 6.2 $\displaystyle\int \frac{x^3+1}{x-2}\,dx$. Resolvemos así

$$\begin{aligned} \frac{x^3+1}{x-2} &= \frac{x^2(x-2)+2x^2+1}{x-2} = x^2 + \frac{2x(x-2)+4x+1}{x-2} \\ &= x^2+2x+\frac{4(x-2)+8+1}{x-2} = x^2+2x+4+\frac{9}{x-2} \end{aligned}$$

Luego
$$\int \frac{x^3+1}{x-2}\,dx = \frac{x^3}{3} + x^2 + 4x + 9\ln|x-2| + C.$$

Ahora, si $m < n$, descomponemos $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ en una *suma de fracciones simples*, esto es

$$\begin{aligned}
\frac{p(x)}{q(x)} &= \frac{A_{1,1}}{(x-a_1)^{l_1}} + \cdots + \frac{A_{1,l_1}}{(x-a_1)} + \cdots + \frac{A_{k,1}}{(x-a_k)^{l_k}} + \cdots + \frac{A_{k,l_k}}{(x-a_1)} \\
&+ \frac{B_{1,1}x + C_{1,1}}{(x^2+2b_1x+c_1)^{r_1}} + \cdots + \frac{B_{1,r_1}x + C_{1,r_1}}{(x^2+2b_1x+c_1)} + \cdots \\
&+ \frac{B_{s,1}x + C_{s,1}}{(x^2+2b_sx+c_s)^{r_s}} + \cdots + \frac{B_{s,r_s}x + C_{s,r_s}}{(x^2+2b_sx+c_s)}
\end{aligned}$$

donde los denominadores de cada fracción son los factores lineales o cuadráticos (y potencias de estos) que resultan de la factorización de $q(x)$ (siendo l_i y r_j las multiplicidades respectivas de estos factores en $q(x)$). Que tal descomposición es posible siempre es un importante teorema del álgebra cuya demostración dejamos para el final de éste capítulo, y que utiliza, a su vez, el no menos importante *teorema fundamental del álgebra* (que no demostraremos aqui[1]) según el cual todo polinomio, con coeficientes reales, puede factorizarse en un producto de polinomios de grado 1 o 2, irreducibles y con coeficientes reales.

De acuerdo con lo antes escrito, estamos asumiendo entonces que nuestro polinomio $q(x)$ viene dado en la forma

$$q(x) = (x-a_1)^{l_1} \cdots (x-a_k)^{l_k} (x^2+2b_1x+c_1)^{r_1} \cdots (x^2+2b_sx+c_s)^{r_s}$$

donde los factores de grado 2 son irreducibles en $\mathbb{R}$.

Observación 6.1 La irreducibilidad en $\mathbb{R}$ de $x^2+2bx+c$ se deduce verificando la desigualdad $c - b^2 > 0$.

Se tienen cuatro casos.

Caso 6.1 Los factores de $q(x)$ son todos lineales y ninguno se repite. Es decir,

$$q(x) = (x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n), \quad \text{con } a_i \neq a_j, \quad \text{siempre que } i \neq j.$$

En ese caso escribimos

$$\begin{aligned}
\frac{p(x)}{q(x)} &= \frac{A_1}{x-a_1} + \frac{A_2}{x-a_2} + \cdots + \frac{A_n}{x-a_n} \qquad (6.1) \\
&= \frac{A_1(x-a_2)\cdots(x-a_n) + \cdots + A_n(x-a_1)\cdots(x-a_{n-1})}{(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)}
\end{aligned}$$

donde A_1, A_2, ..., A_n son números reales que se determinan igualando numeradores y resolviendo las ecuaciones que se obtienen, para distintos valores arbitrarios de x, como se ilustra en el siguiente ejemplo.

[1] Ver M. Spivak, *Calculus*, editorial Reverté S.A., 1978, para una demostración de ese resultado

Ejemplo 6.3 $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^2-4}dx$. Factorizamos el denominador:

$$q(x) = x^2 - 4 = (x-2)(x+2) \quad \text{(factores lineales distintos)}$$

De acuerdo con lo explicado escribimos

$$\frac{x+1}{x^2-4} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2} = \frac{A(x+2)+B(x-2)}{(x-2)(x+2)}$$

Como los denominadores son iguales, igualamos numeradores

$$x+1 = A(x+2) + B(x-2)$$

y asignando valores arbitrarios a x (preferiblemente que anulen algún factor) obtenemos

$$\begin{aligned} \text{para } x = -2 \quad &\Rightarrow \quad B = \frac{1}{4} \\ \text{para } x = 2 \quad &\Rightarrow \quad A = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} \int \frac{x+1}{x^2-4}dx &= \int \frac{A}{x-2}\,dx + \int \frac{B}{x+2}\,dx = \frac{3}{4}\int \frac{dx}{x-2} + \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x+2} \\ &= \frac{3}{4}\ln|x-2| + \frac{1}{4}\ln|x+2| + C \end{aligned}$$

Observación 6.2 Otra manera de calcular los coeficientes $A_1, \ldots, A_n$ se basa en la siguiente observación sobre la derivada de $q(x)$. Puesto que

$$q(x) = (x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)$$

donde ninguno de los factores se repite, su derivada tiene la forma

$$\begin{aligned} q'(x) &= (x-a_2)\cdots(x-a_n) + (x-a_1)\cdots(x-a_n) + \cdots + (x-a_1)\cdots(x-a_{n-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\prod_{j\neq i}(x-a_j) \end{aligned}$$

Por otra parte, si

$$\frac{A_1}{x-a_1} + \frac{A_2}{x-a_2} + \cdots + \frac{A_n}{x-a_n} = \frac{p(x)}{q(x)}$$

entonces, multiplicando ambos lados por $q(x)$, tenemos

$$A_1\prod_{j\neq 1}(x-a_j) + A_2\prod_{j\neq 2}(x-a_j) + \cdots + A_n\prod_{j\neq n}(x-a_j) = p(x)$$

Observando que, para cada $i = 1, \ldots, n$, el producto de factores lineales que acompaña a A_i es exactamente el i–ésimo sumando de $q'(x)$, concluimos que, para cada $i = 1, \ldots, n$,

$$A_i \;=\; \frac{p(a_i)}{\prod\limits_{j \neq i}(a_i - a_j)} = \frac{p(a_i)}{q'(a_i)} \tag{6.2}$$

es decir, el valor de A_i es igual al cociente de p sobre q', ambos evaluados en a_i, la i–ésima raíz del polinomio q. Esta fórmula para calcular los coeficientes A_i puede ser más ventajosa que resolver sistemas de ecuaciones lineales, en particular si $q(x)$ es un polinomio de grado muy grande. Como ejemplo calculemos los coeficientes A y B del ejemplo anterior utilizando esta fórmula. Tenemos que $q'(x) = 2x$ y, por lo tanto, $A = p(2)/q'(2) = 3/4$ y $B = p(-2)/q'(-2) = 1/4$. Finalmente, téngase en cuenta que en la deducción de la fórmula (6.2) se utilizó el que $q(x)$ es un producto de factores lineales todos distintos y, por lo tanto, esta fórmula no sirve para calcular los A_i de los casos que siguen a continuación.

Caso 6.2 Los factores de $q(x)$ son todos lineales y algunos se repiten. Supongamos que $(x - a)$ es un factor que se repite k veces. Entonces, correspondiente a ese factor habrá, en la descomposición (6.1), la suma de las k fracciones simples

$$\frac{A_1}{(x-a)^k} + \frac{A_2}{(x-a)^{k-1}} + \cdots + \frac{A_{k-1}}{(x-a)^2} + \frac{A_k}{(x-a)}$$

donde $A_1, \ldots, A_k$ son números reales. Luego se procede como en el caso anterior.

Ejemplo 6.4 $\displaystyle\int \frac{x^3+1}{(x+2)(x-1)^3}dx$. Escribimos

$$\begin{aligned}
\frac{x^3+1}{(x+2)(x-1)^3} &= \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} + \frac{D}{(x-1)^3} \\
&= \frac{A(x-1)^3 + B(x+2)(x-1)^2 + C(x+2)(x-1) + D(x+2)}{(x+2)(x-1)^3}
\end{aligned}$$

igualamos numeradores

$$x^3 + 1 = A(x-1)^3 + B(x+2)(x-1)^2 + C(x+2)(x-1) + D(x+2)$$

y observamos que fácilmente se obtienen $A = 7/27$ y $D = 2/3$ si evaluamos la ecuación anterior en $x = -2$ y $x = 1$ respectivamente. Para obtener los otros dos coeficientes evaluamos x en 0 y en 1 (y damos los valores hallados a A y D), lo cual da las ecuaciones

$$\begin{aligned}
B - C &= -\frac{2}{27} \\
2B - C &= \frac{19}{27}
\end{aligned}$$

de estas últimas se obtiene $B = 7/9$ y $C = 23/27$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^3+1}{(x+2)(x-1)^3}\,dx &= \frac{7}{27}\int \frac{dx}{x+2} + \frac{7}{9}\int \frac{dx}{x-1} + \frac{23}{27}\int \frac{dx}{(x-1)^2} + \frac{2}{3}\int \frac{dx}{(x-1)^3} \\
&= \frac{7}{27}\ln|x+2| + \frac{7}{9}\ln|x-1| - \frac{23}{27}\left(\frac{1}{x-1}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x-1}\right)^2 + C
\end{aligned}$$

Observación 6.3 En este caso también los coeficientes $A_1, \ldots, A_k$, que acompañan a las fracciones simples correspondientes a cada potencia del factor $(x-a)$ que se repite k veces, pueden calcularse por una fórmula que envuelve la derivada de una función. Veamos como. Si $q(x)$ se descompone en $(x-a)^k h(x)$, con $h(a) \neq 0$, entonces

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(x)}{(x-a)^k h(x)} = \frac{A_1}{(x-a)^k} + \frac{A_2}{(x-a)^{k-1}} + \cdots + \frac{A_k}{(x-a)} + \frac{r(x)}{h(x)}.$$

Multiplicando por $(x-a)^k$ obtenemos:

$$\frac{p(x)}{h(x)} = A_1 + A_2(x-a) + \cdots + A_k(x-a)^{k-1} + (x-a)^k \frac{r(x)}{h(x)}.$$

De aqui se deduce que $A_1 = \dfrac{p(a)}{h(a)}$, $A_2 = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{p(a)}{h(a)}\right), \ldots, A_k = \dfrac{1}{(k-1)!}\dfrac{d^{k-1}}{dx^{k-1}}\left(\dfrac{p(a)}{h(a)}\right)$.

Caso 6.3 La factorización de $q(x)$ contiene factores cuadráticos irreducibles que no se repiten. En este caso al descomponer $p(x)/q(x)$ en una suma de fracciones simples, por cada factor cuadrático irreducible de $q(x)$, digamos $x^2+2bx+c$, corresponde una fracción cuyo denominador es el factor cuadrático y numerador un polinomio de grado 1 con coeficientes indeterminados; es decir, una fracción de la forma:

$$\frac{Ax+B}{x^2+2bx+c}$$

Luego se procede a igualar numeradores y resolver las ecuaciones correspondientes para determinar los coeficientes reales, como en el caso anterior.

Ejemplo 6.5 $\displaystyle\int \frac{x^3+x+1}{x^4-81}\,dx$. Descomponemos el integrando en fracciones simples

$$\frac{x^3+x+1}{x^4-81} = \frac{x^3+x+1}{(x-3)(x+3)(x^2+9)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+3} + \frac{Cx+D}{x^2+9}$$

y obtenemos

$$x^3+x+1 = A(x+3)(x^2+9) + B(x-3)(x^2+9) + (Cx+D)(x^2-9)$$

Para $x=3$, $x=-3$, $x=0$ y $x=1$ se tiene, respectivamente, $A = 31/108$, $B = 29/108$, $D = (27A-27B-1)/9 = -1/18$ y $C = (40A-20B-8D-3)/8 = 4/9$. Por lo tanto

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3+x+1}{x^4-81}\,dx &= \frac{31}{108}\int\frac{dx}{x-3} + \frac{29}{108}\int\frac{dx}{x+3} + \frac{4}{9}\int\frac{x\,dx}{x^2+9} - \frac{1}{18}\int\frac{dx}{x^2+9} \\ &= \frac{31}{108}\ln|x-3| + \frac{29}{108}\ln|x+3| + \frac{2}{9}\ln|x^2+9| - \frac{1}{54}\arctan\frac{x}{3} + C\end{aligned}$$

(Para la integración de $\frac{x}{x^2+9}$ hágase la sustitución $u = x^2+9$; y para la de $\frac{1}{x^2+9}$ utilice el método de sustitución trigonométrica o vea la tabla de integrales simples en el capítulo 2.)

Caso 6.4 La factorización de $q(x)$ contiene factores cuadráticos irreducibles que se repiten. Supongamos que $x^2 + 2bx + c$ es un factor de $q(x)$ que se repite k veces, entonces en la descomposición de $p(x)/q(x)$ en suma de fracciones simples debe tenerse, correspondiente al factor $(x^2 + 2bx + c)^k$, la suma de las siguientes k fracciones:

$$\frac{A_1 x + B_1}{(x^2 + 2bx + c)^k} + \frac{A_2 x + B_2}{(x^2 + 2bx + c)^{k-1}} + \cdots + \frac{A_k x + B_k}{x^2 + 2bx + c}$$

donde $A_1,\ B_1,\ \ldots,\ A_k,\ B_k$ son números reales a ser determinados como en los casos anteriores.

Ejemplo 6.6 $\displaystyle\int \frac{x-1}{x(x^2+2x+3)^2}\,dx$. Reducimos a fracciones simples

$$\frac{x-1}{x(x^2+2x+3)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{(x^2+2x+3)^2} + \frac{Dx+E}{x^2+2x+3}$$

igualando numeradores se sigue que

$$\begin{aligned} x-1 &= A(x^2+2x+3)^2 + (Bx+C)x + (Dx+E)x(x^2+2x+3) \\ &= x^4(A+D) + x^3(4A+2D+E) + x^2(10A+B+3D+2E) \\ &\quad + x(12A+C+3E) + 9A \end{aligned}$$

igualando coeficientes y resolviendo simultáneamente obtenemos $A = -1/9$, $B = 1/3$, $C = 1/3$, $D = 1/9$ y $E = 2/9$. Por lo tanto,

$$\int \frac{x-1}{x(x^2+2x+3)^2}\,dx = -\frac{1}{9}\int \frac{dx}{x} + \frac{1}{3}\int \frac{x+1}{(x^2+2x+3)^2}\,dx + \frac{1}{9}\int \frac{x+2}{x^2+2x+3}\,dx$$

Para resolver $\displaystyle\int \frac{x+1}{(x^2+2x+3)^2}\,dx$, multiplicamos numerador y denominador por 2 y hacemos la sustitución $u = x^2 + 2x + 3$ (por lo tanto $du = (2x+2)\,dx$). Así

$$\begin{aligned} \int \frac{x+1}{(x^2+2x+3)^2}\,dx &= \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{(x^2+2x+3)^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u^2} \\ &= -\frac{1}{2u} = -\frac{1}{2(x^2+2x+3)} \end{aligned}$$

y para resolver

$$\int \frac{x+2}{x^2+2x+3}\,dx = \int \frac{x+2}{(x+1)^2+2}\,dx$$

utilizamos el método de sustitución trigonométrico, tomando $x + 1 = \sqrt{2}\tan\theta$ y $dx = \sqrt{2}\sec^2\theta\,d\theta$, lo cual nos da el resultado final

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right) - \ln\left|\frac{\sqrt{2}}{(x+1)^2+2}\right|$$

Finalmente

$$\int \frac{x-1}{x(x^2+2x+3)^2}\,dx = -\frac{1}{9}\ln|x| - \frac{1}{6}\left(\frac{1}{x^2+2x+3}\right) + \frac{\sqrt{2}}{18}\arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right) - \frac{1}{9}\ln\left|\frac{\sqrt{2}}{(x+1)^2+2}\right| + C$$

Nota adicional Veamos una demostración del teorema que fundamenta los métodos de este capítulo; a saber

Teorema de Descomposición en Fracciones Simples: Sea $\frac{p(x)}{q(x)}$ una función racional, donde $p(x)$ y $q(x)$ son polinomios con coeficientes reales, grado de $p(x)$ < grado de $q(x)$ y $q(x)$ tiene la siguiente factorización en factores lineales y cuadráticos irreducibles con multiplicidades respectivas l_j $(1 \leq j \leq k)$ y r_j $(1 \leq j \leq s)$:

$$q(x) = (x-a_1)^{l_1}\cdots(x-a_k)^{l_k}(x^2+2b_1x+c_1)^{r_1}\cdots(x^2+2b_sx+c_s)^{r_s} \tag{6.3}$$

Entonces $\frac{p(x)}{q(x)}$ se puede expresar como la suma de todas las expresiones obtenidas de la siguiente manera: por cada factor $(x-a)^l$ de $q(x)$ se tiene una expresión de la forma

$$\frac{A_1}{(x-a)^l} + \frac{A_2}{(x-a)^{l-1}} + \cdots + \frac{A_l}{(x-a)} \tag{6.4}$$

con $A_1, \ldots, A_l$, números reales; y por cada factor $(x^2+2bx+c)^r$ se tiene una expresión de la forma

$$\frac{B_1x+C_1}{(x^2+2bx+c)^r} + \frac{B_2x+C_2}{(x^2+2bx+c)^{r-1}} + \cdots + \frac{B_rx+C_r}{(x^2+2bx+c)} \tag{6.5}$$

(Los dos tipos de fracciones que constituyen las expresiones generales anteriores se llaman simples.)

Demostración: Lo primero que haremos es extender la descomposición (6.3) de $q(x)$ al conjunto de los números complejos[2]. En ese caso cada factor cuadrático irreducible $x^2+2bx+c$ tiene por raíces un número complejo $\alpha+i\beta$ y su conjugado $\alpha-i\beta$ y, en consecuencia, $q(x)$ se descompone en factores lineales asi:

$$\begin{aligned} q(x) &= (x-a_1)^{l_1}\cdots(x-a_k)^{l_k}(x-(\alpha_1+i\beta_1))^{r_1}(x-(\alpha_1-i\beta_1))^{r_1}\cdots \\ &\cdots (x-(\alpha_s+i\beta_s))^{r_s}(x-(\alpha_s-i\beta_s))^{r_s} \end{aligned} \tag{6.6}$$

Veamos ahora que, para cada uno de los factores de $q(x)$ en (6.6), se tiene una expresión de la forma (6.4). Sea $(x-\xi)$ uno de estos factores lineales y m su multiplicidad. Entonces $q(x) = (x-\xi)^m h(x)$ con $h(\xi) \neq 0$ y escribimos

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(\xi)}{(x-\xi)^m h(\xi)} + \frac{p(x)h(\xi)-p(\xi)h(x)}{h(\xi)(x-\xi)^m h(x)}$$

[2]Asumiré que el lector conoce los números complejos y sus propiedades; pero, en caso de duda, puede hallar en M. Spivak, *op. cit.*, todo lo necesario para demostrar las afirmaciones que haré sobre estos números aqui.

Claramente ξ es una raíz del polinomio $p(x)h(\xi) - p(\xi)h(x) = h(\xi)\left(p(x) - \frac{h(x)}{h(\xi)}\right)$ y, por lo tanto, $p(x)h(\xi) - p(\xi)h(x) = h(\xi)(x-\xi)p_1(x)$, donde $p_1(x)$ es un polinomio de grado menor que el grado de $q(x)$ menos 1 (ya que

$$p_1(x) = \frac{1}{(x-\xi)}\left(p(x) - \frac{h(x)}{h(\xi)}\right) \tag{6.7}$$

y el polinomio de la derecha es de grado menor que el grado de $q(x)/(x-\xi)$).

Luego

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(\xi)/h(\xi)}{(x-\xi)^m} + \frac{p_1(x)}{(x-\xi)^{m-1}h(x)}$$

Sea $A_1 = p(\xi)/h(\xi)$ y asi tenemos la primera fracción simple de la expresión correspondiente al factor $(x-\xi)^m$. Repetimos el procedimiento anterior con los polinomios $p_1(x)$ y $(x-\xi)^{m-1}h(x)$ para obtener la siguiente fracción simple, y asi sucesivamente hasta obtenerlas todas.

El próximo paso es analizar la descomposición en fracciones simples, obtenida anteriormente, correspondiente a las raíces complejas de $q(x)$. Sea $\alpha + i\beta$ una raíz compleja de $q(x)$ con multiplicidad r. Vimos que el conjugado de $\alpha + i\beta$, el número $\alpha - i\beta$, es también raíz de $q(x)$ con igual multiplicidad r y $(x-(\alpha+i\beta))(x-(\alpha-i\beta)) = x^2 + 2bx + c$, con $b = -\alpha$ y $c = \alpha^2 + \beta^2$, es el correspondiente factor cuadrático, con coeficientes reales, cuyas raíces son $\alpha + i\beta$ y $\alpha - i\beta$. Pongamos $\xi = \alpha + i\beta$ y $\bar{\xi} = \alpha - i\beta$. Entonces, según lo hecho anteriormente, el factor $(x-\xi)^r$ da origen a la expresión

$$\frac{A_1}{(x-\xi)^r} + \frac{A_2}{(x-\xi)^{r-1}} + \cdots + \frac{A_r}{(x-\xi)}$$

y el factor $(x-\bar{\xi})^r$ da origen a la expresión

$$\frac{B_1}{(x-\bar{\xi})^r} + \frac{B_2}{(x-\bar{\xi})^{r-1}} + \cdots + \frac{B_r}{(x-\bar{\xi})}$$

Afirmamos que, para cada $j = 1, \ldots, r$, el número B_j es el conjugado de A_j, en notación $B_j = \bar{A}_j$. Esto es asi puesto que, para cada j, A_j y B_j se obtienen al evaluar el mismo cociente de polinomios $\frac{p_{j-1}(x)}{h(x)}$ en ξ y $\bar{\xi}$, respectivamente (y donde $p_0 = p$, p_1 se obtiene como en (6.7), etc.). Luego

$$\frac{A_j}{(x-\xi)^j} + \frac{\bar{A}_j}{(x-\bar{\xi})^j} = \frac{g_j(x)}{(x^2+2bx+c)^j}$$

donde $g_j(x)$ es de grado $\leq j$ y con coeficientes reales. En consecuencia $g_j(x) = (x^2+2bx+c)g_{j1}(x) + s(x)$, donde $s(x)$ es un polinomio de grado 1 con coeficientes reales. Sea entonces $s(x) = D_jx + E_j$, con D_j y E_j reales; en consecuencia,

$$\frac{A_j}{(x-\xi)^j} + \frac{\bar{A}_j}{(x-\bar{\xi})^j} = \frac{D_jx+E_j}{(x^2+2bx+c)^j} + \frac{g_{j1}(x)}{(x^2+2bx+c)^{j-1}}$$

Si repetimos las cuentas esta vez con la fracción $g_{j1}/(x^2+2bx+c)^{j-1}$ (y esto para cada j) obtenemos la descomposición asociada a los factores cuadráticos de $q(x)$ deseada. Esto concluye la demostración del teorema. $\square$

7. Funciones Hiperbólicas y Sustituciones Hiperbólicas

Las funciones seno y coseno hiperbólicos se definen por

$$\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{y} \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \tag{7.1}$$

Por analogía con las funciones trigonométricas se definen la tangente, la cotangente, la secante y la cosecante, respectivamente, como

$$\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad , \quad \coth x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \; , \tag{7.2}$$

$$\operatorname{sech} x = \frac{2}{e^x + e^{-x}} \quad \text{y} \quad \operatorname{csch} x = \frac{2}{e^x - e^{-x}} \tag{7.3}$$

A partir de estas definiciones se pueden verificar las siguientes fórmulas de diferenciación:

$$\frac{d \operatorname{senh} x}{dx} = \cosh x \quad , \quad \frac{d \cosh x}{dx} = \operatorname{senh} x \; ,$$

$$\frac{d \tanh x}{dx} = \operatorname{sech}^2 x \quad \text{y} \quad \frac{d \coth x}{dx} = -\operatorname{csch}^2 x$$

De estas ecuaciones se obtienen las integrales inmediatas

$$\int \cosh x \, dx = \operatorname{senh} x \quad , \quad \int \operatorname{senh} x \, dx = \cosh x \; ,$$

$$\int \operatorname{sech}^2 x \, dx = \tanh x \quad \text{y} \quad \int \operatorname{csch}^2 x \, dx = -\coth x$$

También utilizando las fórmulas (7.1) se verifican identidades fundamentales como

$$\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1 \tag{7.4}$$

$$\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \operatorname{senh} x \operatorname{senh} y \tag{7.5}$$

$$\operatorname{senh}(x+y) = \operatorname{senh} x \cosh y + \operatorname{senh} y \cosh x \tag{7.6}$$

Estas identidades se pueden combinar de igual manera que se hizo con sus análogas trigonométricas para obtener otras identidades como

$$\cosh^2 x = \frac{\cosh 2x + 1}{2} \quad \text{y} \quad \operatorname{senh}^2 x = \frac{\cosh 2x - 1}{2}$$

y utilizar estas últimas para resolver integrales de la forma

$$\int \cosh^n x\, dx \quad \text{y} \quad \int \operatorname{senh}^n x\, dx$$

o

$$\int \cosh^n x \operatorname{senh}^m x\, dx$$

Podemos proseguir así y desarrollar métodos paralelos a los desarrollados en las secciones (4.1) a la (4.7) del capítulo 4 para resolver todo tipo de integrales de funciones hiperbólicas. No lo haremos aqui y sugerimos al lector que desarrolle esos métodos como ejercicio. Téngase en cuenta, sin embargo, que muchas veces es más efectivo sustituir las funciones hiperbólicas que aparecen en una integral por sus definiciones en términos de e^x, obteniendose asi integrales de polinomios en e^x que resultan fáciles de resolver.

Ejemplo 7.1

$$\begin{aligned}
\int \frac{1+\operatorname{senh} x}{1+\cosh x}\, dx &= \int \frac{1+\frac{e^x-e^{-x}}{2}}{1+\frac{e^x+e^{-x}}{2}}\, dx = \int \frac{(2+e^x-e^{-x})e^x}{(2+e^x+e^{-x})e^x}\, dx \\
&= \int \frac{(2+e^x-e^{-x})e^x}{2e^x+e^{2x}+1}\, dx \quad (\text{sustitución} \quad u=e^x) \\
&= \int \frac{2u+u^2-1}{u(u+1)^2} du
\end{aligned}$$

y esta última es una integral que podemos resolver usando los métodos expuestos en el capítulo 6.

La analogía de las funciones hiperbólicas con las trigonométricas resulta de mejor utilidad no para calcular integrales de funciones hiperbólicas (por todo lo antes dicho) sino, más bien, para calcular integrales de otras funciones (e.g. radicales) cuyas formas sugieren alguna identidad de funciones hiperbólicas y la consecuente sustitución hiperbólica adecuada.

Para ilustrar lo que queremos decir considere, por ejemplo, integrar $\sqrt{b^2x^2-a^2}$. La expresión $b^2x^2-a^2$ sugiere utilizar la sustitución $x=\frac{a}{b}\cosh u$ junto con la identidad (7.4) para eliminar la raíz y obtener

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{b^2x^2-a^2}\, dx &= \int \frac{a}{b} \operatorname{senh} u \sqrt{a^2\cosh^2 u - a^2}\, du = \frac{a^2}{b} \int \operatorname{senh}^2 u\, du \\
&= \frac{a^2}{b}\left(\frac{\operatorname{senh} 2u}{4} - \frac{u}{2}\right) = \frac{a^2}{2b}\left(\operatorname{senh} u \cosh u - u\right) \\
&= \frac{a^2}{2b}\left(x\sqrt{x^2-1} - \operatorname{arccosh} x\right) + C
\end{aligned}$$

recordando que $\operatorname{arccosh} x = \ln(x+\sqrt{x^2-1})$ podemos expresar la solución anterior como

$$\int \sqrt{b^2x^2-a^2}\, dx = \frac{a^2}{2b}\left(x\sqrt{x^2-1} - \ln(x+\sqrt{x^2-1})\right) + C$$

Análogamente, para integrar $\sqrt{b^2x^2+a^2}$ considere el cambio $x = \frac{a}{b}\operatorname{senh} u$, y para integrar $\sqrt{a^2-b^2x^2}$ considere $x = \frac{a}{b}\tanh u$ (para esta última se usa $1-\tanh^2 u = \operatorname{sech}^2 u$). Los detalles los puede desarrollar el lector guiándose con lo realizado en el capítulo 5.

(Recuerde también que $\operatorname{arcsenh} x = \ln(x+\sqrt{x^2+1})$; $\operatorname{arctanh} x = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x}$, si $-1 < x < 1$; $\operatorname{arccoth} x = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x}$, si $-1 < x < 1$. Todas estas fórmulas se deducen fácilmente de las definiciones de las funciones hiperbólicas en términos de la función exponencial.)

Ilustraremos la utilidad de las sustituciones hiperbólicas hallando una fórmula para integrales del tipo $\int \sec^n x\,dx$, para cualquier entero $n \geq 1$.

Ejemplo 7.2 Comencemos con $n = 1$, es decir $\displaystyle\int \sec x\,dx$. Tomamos $u = \sec x$, por lo que $du = \sec x \tan x\,dx = u\sqrt{u^2-1}\,dx$ y se tiene

$$\begin{aligned}
\int \sec x\,dx &\overset{u=\sec x}{=} \int \frac{du}{\sqrt{u^2-1}} \overset{u=\cosh v}{=} \int \frac{\operatorname{senh} v\,dv}{\sqrt{\cosh^2 v - 1}} \\
&= \int dv = v = \operatorname{arccosh} u = \ln(u+\sqrt{u^2-1}) = \ln(\sec x + \tan x)
\end{aligned}$$

Generalizamos a continuación para cualquier entero n.

Ejemplo 7.3 Al igual que en el ejemplo anterior, hacemos $\sec x = u$ seguida de la sustitución hiperbólica $u = \cosh v$ para obtener

$$\begin{aligned}
\int \sec^n x\,dx &\overset{\sec x = u}{=} \int \frac{u^{n-1}}{\sqrt{u^2-1}}du \overset{u=\cosh v}{=} \int \cosh^{n-1} v dv \\
&= \int \frac{1}{2^{n-1}}(e^v+e^{-v})^{n-1}dv = \frac{1}{2^{n-1}}\int \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}e^{kv}e^{-(n-1-k)v}dv \\
&= \frac{1}{2^{n-1}}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}\int e^{v(2k-n+1)}dv \qquad (7.7)
\end{aligned}$$

Sea $\alpha = 2k-n+1$. Si n es **par**, entonces $2k \neq n-1$ y, por lo tanto, $\alpha \neq 0$ cualquiera sea k. Esto significa que (7.7) es, en efecto, una suma de integrales de la función exponencial y en ese caso resulta ser igual a

$$\frac{1}{2^{n-1}}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}\frac{e^{\alpha v}}{\alpha} = \frac{1}{2^{n-1}}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}\frac{e^{\alpha \operatorname{arccosh} u}}{\alpha}$$

pero $\operatorname{arccosh} u = \ln(u+\sqrt{u^2-1}) = \ln(\sec x + \tan x)$ y, por lo tanto, la última ecuación nos queda igual a

$$\frac{1}{2^{n-1}}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}\frac{(\sec x + \tan x)^{2k-n+1}}{2k-n+1} \qquad (7.8)$$

Si n es **impar**, entonces $k = (n-1)/2$ es un entero para el cual α es 0. En este caso (7.7) nos queda

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2^{n-1}} \left[\binom{n-1}{(n-1)/2} v + \sum_{\substack{k=0 \\ 2k \neq n-1}}^{n-1} \binom{n-1}{k} \frac{e^{\alpha v}}{\alpha} \right] \qquad (7.9) \\ = \; & \frac{1}{2^{n-1}} \left[\binom{n-1}{(n-1)/2} \ln(\sec x + \tan x) + \sum_{\substack{k=0 \\ 2k \neq n-1}}^{n-1} \binom{n-1}{k} \frac{(\sec x + \tan x)^{2k-n+1}}{2k-n+1} \right] \end{aligned}$$

Tenemos asi una fórmula general para $\int \sec^n x \, dx$ deducida con auxilio de las funciones hiperbólicas: si n es par, $\int \sec^n x \, dx$ se calcula mediante la ecuación (7.8); y, si n es impar, utilizamos la ecuación en (7.9). Observe que también se tiene entre las líneas de la demostración anterior una fórmula para $\int \frac{u^n}{\sqrt{u^2-1}} du$ que el lector podría intentar escribir explícitamente.

Ejercicio 7.1 Halle una fórmula para $\int \csc^n x \, dx$ análoga a la fórmula anterior para potencias enteras de la secante

Las sustituciones hiperbólicas se verán otra vez en el capítulo 8.

8. Integrandos Racionalizables

En este capítulo estudiamos algunas integrales de funciones que, mediante un cierto cambio de variable, pueden reducirse a integrales de funciones racionales que resolvemos luego utilizando los métodos expuestos en el capítulo 6.

Recordemos que una función racional es un cociente de polinomios $\frac{p(x)}{q(x)}$. Si denotamos esta función por $R(x)$ y si $f(x)$ es cualquier otra función, entonces $R(f(x))$ es una *función racional de la función* f; esto es, un cociente de polinomias en la variable $f(x)$. Análogamente, $R(f(x), g(x))$ denota una función racional en las dos variables $f(x)$ y $g(x)$; es decir, un cociente de dos polinomios que toman por variables las funciones f y g, y, en general, $R(f_1(x), \ldots, f_n(x))$ denota una función racional de las funciones $f_1, \ldots, f_n$. El problema que nos interesa resolver es el siguiente: dada una función racional de una o más funciones, $R(f_1(x), \ldots, f_n(x))$, transformarla mediante alguna sustitución en una función racional $R(u)$, es decir, un cociente de polinomios.

8.1 Funciones racionales de potencias fraccionarias

Si se tiene una función racional de la forma $R(x^{1/n_1}, x^{1/n_2}, \ldots, x^{1/n_k})$, un cociente de potencias fraccionarias de la variable x, entonces la sustitución

$$x = z^m$$

donde m es el mínimo común múltiplo (m.c.m.) de los denominadores de los exponentes, transforma la función en un cociente de polinomios en z. Este hecho es fácil de verificar (¡verifíquelo!).

Ejemplo 8.1.1

$$\int \frac{x}{3+\sqrt{x}}\,dx = \int \frac{x^{1/1}}{3+x^{1/2}}\,dx \quad \text{(m.c.m. de los denominadores = 2)}$$

Sea $x = z^2$, por lo tanto, $dx = 2z\,dz$. Luego

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{3+\sqrt{x}}\,dx &= \int \frac{2z^3}{3+z}\,dz = 2\int \left(z^2 - 3z + 9 - \frac{27}{3+z}\right) dz \\ &= 2\left(\frac{z^3}{3} - \frac{3}{2}z^2 + 9z - 27\ln|3+z|\right) + C \quad \text{(retornamos } z = x^{1/2}\text{)}\end{aligned}$$

$$= \quad 2\left(\frac{x^{3/2}}{3} - \frac{3}{2}x + 9x^{1/2} - 27\ln|3 + x^{1/2}|\right) + C$$

8.2 Funciones racionales de senos y cosenos

Si se tiene una función racional de la forma $R(\operatorname{sen} x, \cos x)$, se lleva a una función racional mediante la sustitución

$$z = \tan\frac{x}{2}$$

Esto resulta asi ya que se tendrá

$$x = 2\arctan z \quad \text{y, en consecuencia,} \quad dx = \frac{2}{1+z^2}\,dz$$

Utilizando la identidad $\cos 2y = 2\cos^2 y - 1$ y tomando $y = x/2$ tenemos

$$\begin{aligned}\cos x &= 2\cos^2\frac{x}{2} - 1 = \frac{2}{\sec^2(x/2)} - 1 = \frac{2}{1+\tan^2(x/2)} - 1 \\ &= \frac{2}{1+z^2} - 1 = \frac{1-z^2}{1+z^2}\end{aligned}$$

Análogamente, a partir de la identidad $\operatorname{sen} 2y = 2\operatorname{sen} y\cos y$ y tomando $y = x/2$ tenemos

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} x &= 2\operatorname{sen}(x/2)\cos(x/2) = \frac{2\operatorname{sen}(x/2)\cos^2(x/2)}{\cos(x/2)} = 2\tan(x/2)\frac{1}{\sec^2(x/2)} \\ &= \frac{2\tan(x/2)}{1+\tan^2(x/2)} = \frac{2z}{1+z^2}\end{aligned}$$

En resumen, si se tiene una función racional de la forma $R(\operatorname{sen} x, \cos x)$, entonces con la sustitución $z = \tan(x/2)$ se obtiene lo siguiente:

$$\int R(\operatorname{sen} x, \cos x)\,dx = \int R\left(\frac{2z}{1+z^2}\ ,\ \frac{1-z^2}{1+z^2}\right)\frac{2}{1+z^2}\,dz$$

Ejemplo 8.2.1

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{5+4\cos x} &= \int \frac{\frac{2\,dz}{1+z^2}}{5+4\left(\frac{1-z^2}{1+z^2}\right)} = \int \frac{2\,dz}{9-z^2} = \int \frac{2\,dz}{(3-z)(3+z)} \\ &= \frac{1}{3}\int\frac{dz}{3-z} + \frac{1}{3}\int\frac{dz}{3+z} \quad \text{(complete los pasos de la descom-posición en fracciones simples)} \\ &= -\frac{1}{3}\ln|3-z| + \frac{1}{3}\ln|3+z| + C = \frac{1}{3}\ln\left|\frac{3+z}{3-z}\right| + C\end{aligned}$$

devolviendo el cambio se concluye

$$\int \frac{dx}{5+4\cos x} = \frac{1}{3}\ln\left|\frac{3+\tan(x/2)}{3-\tan(x/2)}\right| + C$$

Ejemplo 8.2.2 Volvemos a integrar una de nuestras funciones favoritas:

$$
\begin{aligned}
\int \sec x\, dx &= \int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{(1+z^2)2\, dz}{(1-z^2)(1+z^2)} = \int \frac{2\, dz}{1-z^2} \\
&= \int \left(\frac{1}{1+z} + \frac{1}{1-z} \right) dz = \ln \left| \frac{1+z}{1-z} \right| + C \\
&= \ln \left| \frac{1+\tan(x/2)}{1-\tan(x/2)} \right| + C
\end{aligned}
$$

Pero

$$
\begin{aligned}
\frac{1+\tan(x/2)}{1-\tan(x/2)} &= \frac{\cos(x/2) + \operatorname{sen}(x/2)}{\cos(x/2) - \operatorname{sen}(x/2)} \\
&= \frac{(\cos(x/2) + \operatorname{sen}(x/2))(\cos(x/2) + \operatorname{sen}(x/2))}{(\cos(x/2) - \operatorname{sen}(x/2))(\cos(x/2) + \operatorname{sen}(x/2))} \\
&= \frac{1 + 2\cos(x/2)\operatorname{sen}(x/2)}{\cos^2(x/2) - \operatorname{sen}^2(x/2)} = \frac{1 + \operatorname{sen} x}{\cos x} = \sec x + \tan x
\end{aligned}
$$

por lo tanto

$$
\int \sec x\, dx = \ln|\sec x + \tan x| + C.
$$

8.3 Funciones racionales del tipo $R(x, \sqrt{1-x^2})$

Una función racional de la forma $R(x, \sqrt{1-x^2})$ se puede llevar a una función racional de dos maneras:

(a) Mediante la sustitución trigonométrica

$$
x = \cos z, \quad \sqrt{1-x^2} = \operatorname{sen} z, \quad dx = -\operatorname{sen} z\, dz;
$$

lo cual nos da

$$
\int R(x, \sqrt{1-x^2})\, dx = -\int R(\cos z, \operatorname{sen} z) \operatorname{sen} z\, dz
$$

una integral de función racional de senos y cosenos que resolvemos por el método explicado en 8.2.

(b) Si escribimos $\sqrt{1-x^2} = (1+x)\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$, esto sugiere la sustitución:

$$
z = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}, \quad \text{de donde} \quad x = \frac{1-z^2}{1+z^2}, \ 1+x = \frac{2}{1+z^2} \ \text{ y } \ dx = \frac{-4z}{(1+z^2)^2}\, dz.
$$

Luego

$$\begin{aligned}\int R(x,\sqrt{1-x^2})\,dx &= \int R\left(x,(1+x)\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)\,dx\\ = &\int R\left(\frac{1-z^2}{1+z^2},\frac{2z}{1+z^2}\right)\frac{-4z}{(1+z^2)^2}\,dz\end{aligned}$$

una función racional.

Ejemplo 8.3.1 La forma de la siguiente integral inmediatamente sugiere utilizar el método (b)

$$\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x(1+x)}\,dx = \int \frac{(1+x)}{x(1+x)}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx = \int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx \quad \left(\text{sea } \; z=\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)$$

$$= \int \frac{1+z^2}{1-z^2}\frac{-4z^2}{(1+z^2)^2}\,dz = -4\int \frac{z^2}{1-z^4}\,dz \quad \begin{array}{l}\text{(un integrando racional que resol-}\\ \text{vemos por los métodos del cap. 6)}\end{array}$$

8.4 Funciones racionales del tipo $R(x,\sqrt{x^2-1})$

Una función racional de la forma $R(x,\sqrt{x^2-1})$ se puede llevar a una función racional de tres maneras:

(a) Mediante la sustitución hiperbólica

$$x=\cosh z, \quad \sqrt{x^2-1}=\operatorname{senh} z, \quad dx=\operatorname{senh} z\,dz;$$

obteniéndose asi,

$$\int R(x,\sqrt{x^2-1})\,dx = \int R(\cosh z,\,\operatorname{senh} z)\operatorname{senh} z\,dz$$

Esta última integral se resuelve colocando las definiciones de $\operatorname{senh} z$ y $\cosh z$ en términos de e^z y haciendo la sustitución $y=e^z$ (recordemos lo visto en el capítulo 7).

(b) Si escribimos $\sqrt{x^2-1}=(x+1)\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$, esto sugiere la sustitución:

$$z=\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}, \quad \text{de donde } \; x=\frac{1+z^2}{1-z^2}, \; 1+x=\frac{2}{1-z^2} \; \text{ y } \; dx=\frac{4z}{(1-z^2)^2}\,dz.$$

Luego

$$\begin{aligned}\int R(x,\sqrt{x^2-1})\,dx &= \int R\left(x,(x+1)\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\right)\,dx\\ = &\int R\left(\frac{1+z^2}{1-z^2},\frac{2z}{1-z^2}\right)\frac{4z}{(1-z^2)^2}\,dz\end{aligned}$$

una función racional.

(c) Mediante la sustitución trigonométrica

$$x = \sec z, \quad \text{por lo que} \quad \sqrt{x^2-1} = \tan z \quad \text{y} \quad dx = \tan z \sec z \, dz.$$

Asi,

$$\int R(x, \sqrt{x^2-1})\, dx = \int R(\sec z, \tan z) \tan z \sec z \, dz$$

la cual es una integral de función racional de senos y cosenos que se resuelve por el método explicado en 8.2.

Ejemplo 8.4.1 Resolvemos la siguiente integral por el método (c)

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1} - (x^2-1)^{3/2}} &= \int \frac{\tan z \sec z}{\sec^2 z \tan z - \tan^3 z}\, dz = \int \frac{\sec z \, dz}{\sec^2 z - \tan^2 z} \\
&= \int \sec z \, dz = \ln|\sec z + \tan z| + C \\
&= \ln|x + \sqrt{x^2-1}| + C
\end{aligned}$$

(Para obtener la última igualdad utilice el triángulo trigonométrico correspondiente a $x = \sec z$ - ver capítulo 5 - o utilice la identidad $\tan^2 z + 1 = \sec^2 z$.)

8.5 Funciones racionales del tipo $R(x, \sqrt{x^2+1})$

Una función racional de la forma $R(x, \sqrt{x^2+1})$ se puede llevar a una función racional de dos maneras:

(a) Mediante la sustitución trigonométrica

$$x = \tan z, \quad \text{por lo que} \quad \sqrt{x^2+1} = \sec z, \; dx = \sec^2 z \, dz$$

para luego obtener

$$\int R(x, \sqrt{x^2+1})\, dx = \int R(\tan z, \sec z) \sec^2 z \, dz$$

una integral del tipo 8.2.

(b) Mediante la sustitución hiperbólica

$$x = \operatorname{senh} z, \quad \sqrt{x^2+1} = \cosh z, \quad dx = \cosh z \, dz;$$

obteniéndose asi,

$$\int R(x, \sqrt{x^2+1})\, dx = \int R(\operatorname{senh} z, \cosh z) \cosh z \, dz,$$

que se resuelve como se explica en 8.4 (a).

Ejemplo 8.5.1

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}\,dx &= \int \frac{\operatorname{senh}^2 z}{\cosh z}\cosh z\,dz = \int \operatorname{senh}^2 z\,dz\\
&= \int \frac{\cosh 2z - 1}{2}\,dz = \frac{1}{2}\left(\frac{\operatorname{senh} 2z}{2} - z\right) + C\\
&= \frac{1}{2}(x\sqrt{x^2+1} - \operatorname{arcsenh} x) + C\\
&= \frac{1}{2}(x\sqrt{x^2+1} - \ln(x + \sqrt{x^2+1})) + C
\end{aligned}$$

9. 103 Integrales

Resolver

1. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x e^{\sec x}}{\cos^2 x}\,dx$

2. $\displaystyle\int \frac{\cos 2x}{1+\operatorname{sen} 2x}\,dx$

3. $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\sqrt{1+\operatorname{sen} x}}\,dx$

4. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{arcsen} x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

5. $\displaystyle\int \frac{\tan x}{\cos^2 x}\,dx$

6. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$

7. $\displaystyle\int \frac{x^7+x^3}{x^4-1}\,dx$

8. $\displaystyle\int \frac{1-4x+8x^2-8x^3}{x^4(2x^2-2x+1)^2}\,dx$

9. $\displaystyle\int \frac{(3x-7)\,dx}{x^3-6x^2+11x-6}$

10. $\displaystyle\int \frac{\cos x}{1+\operatorname{sen}^2 x}\,dx$

11. $\displaystyle\int \frac{\cot\theta}{\ln(\operatorname{sen}\theta)}d\theta$

12. $\displaystyle\int x^{2/3}(x^{5/3}+1)^{2/3}\,dx$

13. $\displaystyle\int \frac{1+e^x}{1-e^x}\,dx$

14. $\displaystyle\int \cos\sqrt{x}\,dx$

15. $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x\cos x}$

16. $\displaystyle\int \sqrt{1-\operatorname{sen} x}\,dx$

17. $\displaystyle\int \frac{dx}{(a^2-x^2)^{3/2}}$

18. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x\,dx}{\cos^2 x-5\cos x+4}$

19. $\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{\sqrt[3]{1+e^x}}\,dx$

20. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^6-1}$

21. $\displaystyle\int \frac{dy}{y(2y^3+1)^2}$

22. $\displaystyle\int \frac{x^{2/3}-2x^{1/3}+1}{x+1}\,dx$

23. $\displaystyle\int \frac{dx}{x(x^2+1)^2}$

24. $\displaystyle\int \ln\sqrt{x-1}\,dx$

25. $\displaystyle\int \frac{d\theta}{1-\tan^2\theta}$

26. $\displaystyle\int \frac{(x+1)}{x^3-x^2}\,dx$

27. $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+4x+3}\,dx$

28. $\displaystyle\int \frac{du}{(e^u-e^{-u})^2}$

29. $\displaystyle\int \frac{4\,dx}{x^3+4x}$

30. $\displaystyle\int \frac{dx}{5x^2+8x+5}$

31.	$\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}\,dx$	32.	$\displaystyle\int e^x \cos 2x\,dx$	33.	$\displaystyle\int \frac{dx}{x(3\sqrt{x}+1)}$
34.	$\displaystyle\int \frac{dx}{x(1+\sqrt[3]{x})}$	35.	$\displaystyle\int \frac{\cot\theta}{1+\operatorname{sen}^2\theta}d\theta$	36.	$\displaystyle\int \frac{z^5 dz}{\sqrt{1+z^2}}$
37.	$\displaystyle\int \frac{e^{4t}}{(1+e^{2t})^{2/3}}dt$	38.	$\displaystyle\int \frac{dx}{x^{1/5}\sqrt{1+x^{4/5}}}$	39.	$\displaystyle\int x\sec^2 x\,dx$
40.	$\displaystyle\int x \operatorname{arcsen} x\,dx$	41.	$\displaystyle\int \frac{(x^3+x^2)\,dx}{x^2+x-2}$	42.	$\displaystyle\int \frac{x^3+1}{x^3-1}\,dx$
43.	$\displaystyle\int \frac{x\,dx}{(x-1)^2}$	44.	$\displaystyle\int \frac{(2e^{2x}-e^x)\,dx}{\sqrt{3e^{2x}-6e^x-1}}$	45.	$\displaystyle\int \frac{(x+1)\,dx}{(x^2+2x-3)^{2/3}}$
46.	$\displaystyle\int \frac{dy}{(2y+1)\sqrt{y^2+y}}$	47.	$\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{a^2-x^2}}$	48.	$\displaystyle\int (1-x^2)^{3/2}\,dx$
49.	$\displaystyle\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})\,dx$	50.	$\displaystyle\int x\tan^2 x\,dx$	51.	$\displaystyle\int \frac{\arctan x}{x^2}\,dx$
52.	$\displaystyle\int \frac{x+\sqrt{x+1}}{x+2}\,dx$	53.	$\displaystyle\int x\cos^2 x\,dx$	54.	$\displaystyle\int \sqrt{\frac{4+3x}{4-3x}}\,dx$
55.	$\displaystyle\int \frac{du}{e^{4u}+4e^{2u}+3}$	56.	$\displaystyle\int x\ln\sqrt{x+2}\,dx$	57.	$\displaystyle\int (x+1)^2 e^x\,dx$
58.	$\displaystyle\int \operatorname{arcsec} x\,dx$	59.	$\displaystyle\int \frac{8\,dx}{x^4+2x^3}$	60.	$\displaystyle\int \frac{x\,dx}{x^4-16}$
61.	$\displaystyle\int \frac{dx}{1+\cos^2 x}$	62.	$\displaystyle\int x^3 e^{x^2}\,dx$	63.	$\displaystyle\int \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{4-\cos^2 x}}$
64.	$\displaystyle\int x^2 \operatorname{sen}(1-x)\,dx$	65.	$\displaystyle\int \frac{x^3}{(x^2+1)^2}\,dx$	66.	$\displaystyle\int x\sqrt{2x+1}\,dx$
67.	$\displaystyle\int \ln(x+\sqrt{x^2-1})\,dx$	68.	$\displaystyle\int \frac{dt}{t-\sqrt{1-t^2}}$	69.	$\displaystyle\int \operatorname{arcsen}\sqrt{x}\,dx$
70.	$\displaystyle\int \ln(x+\sqrt{x})\,dx$	71.	$\displaystyle\int \frac{x}{1-x^4}\,dx$	72.	$\displaystyle\int \frac{t^2}{\sqrt{1+t^6}}\,dt$

73. $\displaystyle\int \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}-1}}\,dx$

74. $\displaystyle\int \sqrt{\frac{\operatorname{arccosh} x}{x^2-1}}\,dx$

75. $\displaystyle\int \sqrt{1-x^2}\,\operatorname{arcsen} x\,dx$

76. $\displaystyle\int x\,\operatorname{sen}^2(2x)\,dx$

77. $\displaystyle\int \frac{\tan x\,dx}{\tan x+\sec x}$

78. $\displaystyle\int \frac{dt}{\sqrt{e^{2t}+1}}$

79. $\displaystyle\int \frac{1}{(1+x)^2}\sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}\,dx$

80. $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x-\cos x}$

81. $\displaystyle\int \frac{\sec x\,dx}{(\cos^2 x+4\operatorname{sen} x-5)}$

82. $\displaystyle\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$

83. $\displaystyle\int \frac{dx}{x(2+\ln x)}$

84. $\displaystyle\int \frac{\cos 2x-1}{\cos 2x+1}\,dx$

85. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3+1}$

86. $\displaystyle\int \frac{e^{2x}\,dx}{\sqrt[4]{e^x+1}}$

87. $\displaystyle\int \frac{2\cos x-5\operatorname{sen} x}{3\cos x+4\operatorname{sen} x}\,dx$

88. $\displaystyle\int e^{\sqrt{t}}\,dt$

89. $\displaystyle\int \operatorname{sen}\sqrt{x+1}\,dx$

90. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^4 3x\cos^2 3x\,dx$

91. $\displaystyle\int \frac{2t^3+11t+8}{t^3+4t^2+4t}dt$

92. $\displaystyle\int \frac{dr}{\sqrt{3-4r-r^2}}$

93. $\displaystyle\int \frac{(2y^2+1)\,dy}{y^3-6y^2+12y-8}$

94. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4-x}$

95. $\displaystyle\int \frac{\cot^2 3x}{\operatorname{sen}^4 3x}\,dx$

96. $\displaystyle\int \frac{\cot 3t\,dt}{\sqrt{\operatorname{sen}^2 3t-1/4}}$

97. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{arcsen}\sqrt{2\theta}\,d\theta}{\sqrt{1-2\theta}}$

98. $\displaystyle\int \sqrt{\tan x}\,dx$

99. $\displaystyle\int x^n\ln x\,dx,\ n\in\mathbb{R}$

100. $\displaystyle\int \frac{(2x^2-x+2)\,dx}{x^5+2x^3+x}$

101. $\displaystyle\int \frac{dx}{9\cos^2 x-16\operatorname{sen}^2 x}$

102. $\displaystyle\int \frac{dx}{\cosh x+\operatorname{senh} x}$

103. $\displaystyle\int \frac{2+2\cosh x-\operatorname{senh} x}{2+\cosh x+\operatorname{senh} x}\,dx$

10. Respuestas

(Todas las respuestas deben estar seguidas del término $+\ C$; éste se omite para ahorrar espacio.)

1.	$e^{\sec x}$	2.	$\frac{1}{2}\ln\lvert 1+\operatorname{sen} 2x\rvert$	3.	$2\sqrt{1+\operatorname{sen} x}$
4.	$\frac{1}{2}(\operatorname{arcsen} x)^2$	5.	$\frac{1}{2}\tan^2 x$	6.	$\ln\lvert x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\rvert$
7.	$\frac{x^4}{4}+\frac{1}{2}\ln\lvert x^4-1\rvert$	8.	$-\frac{1}{3x^3}-\frac{4x-2}{2x^2-2x+1}$ $-4\arctan(2x-1)$	9.	$\ln\left\lvert\frac{(x-2)(x-3)}{(x-1)^2}\right\rvert$
10.	$\arctan(\operatorname{sen} x)$	11.	$\ln\lvert\ln\operatorname{sen}\theta\rvert$	12.	$\frac{9}{25}(x^{5/3}+1)^{5/3}$
13.	$-2\ln(1-e^x)+x$	14.	$2\sqrt{x}\operatorname{sen}\sqrt{x}+2\cos\sqrt{x}$	15.	$\ln\lvert\tan x\rvert$
16.	$\frac{2\cos x}{\sqrt{1-\operatorname{sen} x}}$	17.	$\frac{x}{a^2\sqrt{a^2-x^2}}$	18.	$\frac{1}{3}\ln\left(\frac{1-\cos x}{4-\cos x}\right)$
19.	$\frac{3(1+e^x)^{2/3}}{10(2e^x-3)^{-1}}$	20.	$\frac{1}{12}\ln\frac{(x-1)^2(x^2-x+1)}{(x+1)^2(x^2+x+1)}-$ $\frac{\sqrt{3}}{6}\arctan\left(\frac{x\sqrt{3}}{1-x^2}\right)$	21.	$\frac{1}{3}\ln\left\lvert\frac{2y^3}{2y^3+1}\right\rvert+$ $(6y^3+3)^{-1}$
22.	$\frac{3(x^{2/3}-4x^{1/3})}{2}+$ $\ln\frac{(x^{1/3}+1)^4}{\sqrt{x^{2/3}-x^{1/3}+1}}+$ $\frac{3}{\sqrt{3}}\arctan(\frac{2}{\sqrt{3}}(x^{1/3}-\frac{1}{2}))$	23.	$\frac{1}{2}(\ln\frac{x^2}{1+x^2}-\frac{x^2}{1+x^2})$	24.	$(x-1)\ln\sqrt{x-1}-\frac{x}{2}$
25.	$\frac{1}{4}\ln\left\lvert\frac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta}\right\rvert+\frac{1}{2}\theta$	26.	$\frac{1}{x}+2\ln\left\lvert 1-\frac{1}{x}\right\rvert$	27.	$\frac{1}{2}\ln\left\lvert\frac{(x+3)^3}{x+1}\right\rvert$
28.	$-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{e^{2u}-1}\right)$	29.	$\ln\left\lvert\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\right\rvert$	30.	$\frac{1}{3}\arctan\left(\frac{5x+4}{3}\right)$

31. $\sqrt{x^2-a^2} - a\left(\arctan \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right)$

32. $\frac{e^x}{5}(\cos 2x + 2\,\mathrm{sen}\, 2x)$

33. $\ln \frac{|x|}{(1+3\sqrt{x})^2}$

34. $\ln\left|\frac{x}{(1+\sqrt[3]{x})^3}\right|$

35. $\ln \frac{|\,\mathrm{sen}\,\theta|}{\sqrt{1+\,\mathrm{sen}^2\theta}}$

36. $\frac{8-4z^2+3z^4}{15(1+z^2)^{-1/2}}$

37. $\frac{3\sqrt[3]{1+e^{2t}}}{8(e^{2t}-3)^{-1}}$

38. $\frac{5}{2}(1+x^{4/5})^{1/2}$

39. $x\tan x + \ln|\cos x|$

40. $\frac{1}{4}\left(x\sqrt{1-x^2} + (2x^2-1)\operatorname{arcsen} x \right)$

41. $\frac{x^2}{2} + \ln((x+2)^{4/3}(x-1)^{2/3})$

42. $x+\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|$

43. $\ln|x-1| - \frac{1}{x-1}$

44. $\frac{1}{\sqrt{3}}\ln|e^x-1+\sqrt{e^{2x}-2e^x-\frac{1}{3}}| + \frac{2}{3}\sqrt{3e^{2x}-6e^x-1}$

45. $\frac{3}{2}(x^2+2x-3)^{1/3}$

46. $\arctan(2\sqrt{y^2+y})$

47. $-\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a^2x}$

48. $\frac{1}{8}(5x-2x^3)\sqrt{1-x^2} + \frac{3}{8}\operatorname{arcsen} x$

49. $x\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2}$

50. $x\tan x - \frac{x^2}{2}+\ln|\cos x|$

51. $\ln\frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{\arctan x}{x}$

52. $x+1+2\sqrt{x+1} - 2\ln|x+1| - 2\arctan\sqrt{x+1}$

53. $\frac{x^2}{4}+\frac{x\,\mathrm{sen}\,2x}{4}+\frac{\cos 2x}{8}$

54. $\frac{8}{3}\arctan\sqrt{\frac{4+3x}{4-3x}} - \frac{4-3x}{3}\sqrt{\frac{4+3x}{4-3x}}$

55. $\frac{1}{12}(\ln\frac{3+e^{2u}}{(1+e^{2u})^3}+4u)$

56. $\frac{1}{4}(x^2-4)\ln(x+2) - \frac{x^2}{8}+\frac{x}{2}$

57. $(x^2+1)e^x$

58. $x\operatorname{arcsec} x| - \ln(|x|+\sqrt{x^2-1})$

59. $2(x^{-1}-x^{-2})$
$\ln|x/(x+2)|$

60. $\frac{1}{16}\ln\left|\frac{x^2-4}{x^2+4}\right|$

61. $\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{\tan x}{\sqrt{2}}\right)$

62. $\frac{1}{2}(x^2-1)e^{x^2}$

63. $\ln|\,\mathrm{sen}\,x| + \sqrt{3+\,\mathrm{sen}^2 x}|$

64. $(x^2-2)\cos(1-x) + 2x\,\mathrm{sen}\,(1-x)$

65. $\frac{1}{2}\left(\ln(x^2+1)+\frac{1}{x^2+1}\right)$

66. $\frac{1}{15}(3x-1)(2x+1)^{3/2}$

67. $x\ln(x+\sqrt{x^2-1}) - \sqrt{x^2-1}$

68. $\frac{1}{2}\ln|t-\sqrt{1-t^2}| - \frac{1}{2}\operatorname{arcsen} t$

69. $\frac{1}{2}\sqrt{x-x^2} - \frac{1}{2}(1-2x)\operatorname{arcsen}\sqrt{x}$

70. $\ln\left(\frac{(x+\sqrt{x})^x)}{1+\sqrt{x}}\right) - x+\sqrt{x}$

71. $\frac{1}{2}\operatorname{arctanh} x^2$

72. $\frac{1}{3}\operatorname{arcsenh} t^3$

73.	$\operatorname{arccosh} e^x$	74.	$\frac{2}{3}(\operatorname{arccosh} x)^{3/2}$	75.	$\frac{1}{4}\operatorname{arcsen}^2 x - \frac{x^2}{4} + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}\operatorname{arcsen} x$
76.	$\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{8}\operatorname{sen} 4x - \frac{1}{32}\cos 4x$	77.	$\sec x - \tan x + x$	78.	$\ln(\sqrt{e^{2t}+1}-1) - t$
79.	$-\frac{3}{8}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{4/3}$	80.	$\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\lvert\csc(x-\frac{\pi}{4}) - \cot(x-\frac{\pi}{4})\rvert$	81.	$\ln[(1-\operatorname{sen} x)^{1/2}(1+\operatorname{sen} x)^{-1/10}(2-\operatorname{sen} x)^{-4/9}] + 1/(6-3\operatorname{sen} x)$
82.	$-\frac{1}{3}(1-x^2)^{1/2}(2+x^2)$	83.	$\ln\lvert 2+\ln x\rvert$	84.	$x - \tan x$
85.	$\ln\frac{\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt[6]{x^2-x+1}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$	86.	$\frac{4}{21}(e^x+1)^{3/4}(3e^x-4)$	87.	$\frac{3}{5}\ln\lvert 3\cos x + 4\operatorname{sen} x\rvert - (2/5)x$
88.	$2e^{\sqrt{t}}(\sqrt{t}-1)$	89.	$2\operatorname{sen}\sqrt{x+1} - 2\sqrt{x+1}\cos\sqrt{x+1}$	90.	$\frac{x}{16} - \frac{\operatorname{sen} 12x}{192} - (\operatorname{sen}^3 6x)/144$
91.	$\frac{2t^2+4t-15}{t+2} + \ln\frac{t^2}{(t+2)^{10}}$	92.	$\operatorname{arcsen}\frac{r+2}{\sqrt{7}}$	93.	$2\ln\lvert y-2\rvert - \frac{8}{y-2} - 9/2(y-2)^2$
94.	$\frac{1}{3}\ln\left\lvert 1-\frac{1}{x^3}\right\rvert$	95.	$-\frac{1}{15}(\cot 3x)^5 - \frac{1}{9}(\cot 3x)^3$	96.	$\frac{2}{3}\operatorname{arcsec}\lvert 2\operatorname{sen} 3t\rvert$
97.	$-\sqrt{1-2\theta}\operatorname{arcsen}\sqrt{2\theta} + \sqrt{2\theta}$	98.	$\frac{\sqrt{2}}{4}\ln\left\lvert\frac{\tan x-\sqrt{2\tan x}+1}{\tan x+\sqrt{2\tan x}+1}\right\rvert + \sqrt{2}/2\tan(\sqrt{2\tan x}-1) + \sqrt{2}/2\tan(\sqrt{2\tan x}+1)$		
99.	$\frac{x^{n+1}\ln x}{n+1} - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}$ si $n \neq 1$	o	$\frac{1}{2}\ln^2 x$ si $n = 1$	100.	$\ln\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right) - \frac{x}{2(x^2+1)} - 1/2\arctan x$
101.	$\frac{1}{24}\ln\left\lvert\frac{4+3\tan x}{4-3\tan x}\right\rvert$	102.	$\frac{-2}{1+\tanh(x/2)}$	103.	$\frac{2}{7}[8\ln\lvert 3-\tanh\frac{x}{2}\rvert - 3\ln\lvert 1-\tanh\frac{x}{2}\rvert + 5\ln\lvert 1+\tanh\frac{x}{2}\rvert - 4/(1+\tanh\frac{x}{2})]$