EJEMPLO DE CÁLCULO DE UN LÍMITE

Calcular el límite siguiente:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{2^{2/3}}+\frac{1}{3^{2/3}}+\ldots\frac{1}{n^{2/3}}}{\sqrt[3]{n}}$$

Solución:
Como los denominadores $\sqrt[3]{n}$ forman una sucesión creciente que tiende a $+\infty$, podemos aplicar el criterio de Stolz. Sean

$$a_n = 1+\tfrac{1}{2^{2/3}}+\tfrac{1}{3^{2/3}}+\ldots+\tfrac{1}{(n-1)^{2/3}}+\tfrac{1}{n^{2/3}}$$
$$b_n = \sqrt[3]{n}$$

Entonces,

$$a_n - a_{n-1} = \tfrac{1}{n^{2/3}},\ b_n - b_{n-1} = \sqrt[3]{n}-\sqrt[3]{n-1}$$

Luego, según el criterio de Stolz,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{2^{2/3}}+\frac{1}{3^{2/3}}+\ldots+\frac{1}{n^{2/3}}}{\sqrt[3]{n}} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^{2/3}}}{\sqrt[3]{n}-\sqrt[3]{n-1}}\\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{2/3}\left(\sqrt[3]{n}-\sqrt[3]{n-1}\right)}\\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{2/3}n^{1/3}\left(1-\left(\frac{n-1}{n}\right)^{1/3}\right)}\\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n\left(1-\left(\frac{n-1}{n}\right)^{1/3}\right)}
\end{aligned}$$

Ahora, teniendo en cuenta que $(1+x)^m-1\sim mx$, cuando $x\to 0$, entonces $1-\left(\frac{n-1}{n}\right)^{1/3} \sim -\frac{1}{3}\left(\frac{n-1}{n}-1\right) = -\frac{1}{3}\left(\frac{-1}{n}\right) = \frac{1}{3n}$. Por tanto el límite pedido resulta:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{2^{2/3}}+\frac{1}{3^{2/3}}+\ldots+\frac{1}{n^{2/3}}}{\sqrt[3]{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n\left(\frac{1}{3n}\right)} = 3$$