Cálculo Infinitesimal.

Tema 2. Función real de variable real.

1.- Estudiar la continuidad de las siguientes funciones:

i) $f(x) = x^2 \cdot \operatorname{sen}(1/x)$ ii) $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$ iii) $f(x) = e^{1/x}$

iv) $f(x) = e^{1/x^2}$ v) $f(x) = \operatorname{sen}[\operatorname{tg}(x)]$ vi) $f(x) = x - [x]$ (Parte entera)

vii) $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in \mathbb{Q}. \\ 0, & x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$

viii) $f(x) = \begin{cases} x^2+1, & x \leq 0. \\ \operatorname{sen}(x) + 2 + x^2, & 0 < x \leq 1. \\ \cos(\pi/2 - x) + 3, & 1 < x \leq 2. \\ \cos[(\pi/4 - 1)x] + \frac{1}{2}x, & x > 2. \end{cases}$

2.- i) La suma de una función continua con otra discontinua es discontinua. Justificación.

ii) ¿Puede ser la resta de dos funciones discontinuas una función continua? (Respuesta: SI). Justificación.

3.- Buscar intervalos en los que haya solución para las ecuaciones $f(x)=0$, en los siguientes casos:

i) $f(x) = x\ln(x) + 1$ ii) $f(x) = \operatorname{sen}(x) + \cos(x)$

iii) $f(x) = \operatorname{sen}(x) + \ln(x)$ iv) $f(x) = \dfrac{x^2+6}{x-2}$

v) $f(x) = \operatorname{sen}(x) + 1$ vi) $f(x) = x^2+1$

4.- Para $f(x) = \ln(ax+b)$ obtener $f^{n)}(x)$, $n \in \mathbb{N}$.

5.- $f(x) = \begin{cases} x^3, & x \geq 0 \\ -x^3, & x \leq 0 \end{cases}$ hallar $f'(0)$, $f''(0)$, $f'''(0)$, $f^{IV}(0)$ (¿Existen?)

$f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$, $f^{IV}(x)$; $(x \neq 0)$

6.— $f(x) = A\cos(wx + w_0) + B\,\text{Sen}(wx + w_0)$, B, A, W, W_0 fijos.

Verificar la igualdad: $f''(x) + w^2 \cdot f(x) = 0$, $\forall x$

7.— Hallar las derivadas de las siguientes funciones:

i) $f(x) = \dfrac{\ln(\cos(x))}{\ln(3x+1)}$ ii) $f(x) = \ln[\cos[\ln[\operatorname{tg}(x)]]]$

iii) $f(x) = Sh(x)$ iV) $f(x) = x^{\text{Sen}(x)}$

v) $\operatorname{arcsen}(\operatorname{Arg}Sh(x)) = f(x)$, vi) $f(x) = \left[(3x + \cos x)^{2x+3}\right]^{\frac{1}{x}}$

vii) $f(x) = 2^x$ viii) $f(x) = \operatorname{Arg}Th(x)$

ix) $f(x) = e^{-1/x^2}$, $f(0) = 0$ x) $f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ x^3 \cdot e^{-1/x}, & x > 0. \end{cases}$

8.— Para $f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \text{sen}(\frac{1}{x}), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, hallar $f'(x)$

¿ Es $f(x)$ continua? ¿ y $f'(x)$?

9.— Hallar la recta tangente o aproximación lineal en $(9, f(9))$ para las siguientes funciones:

i) $f(x) = \sqrt{x}$ ii) $f(x) = \ln[1 + (x-9)^2]$

iii) $f(x) = \text{sen}(x-9)$ iv) $f(x) = \operatorname{arctg}(x-9)$

10.— Para cada una de las funciones anteriores dar un valor aproximado para:

$f(9'01)$, $f(9'001)$, $f(8'99)$, $f(8'8)$, $f(9'5)$

11.— Para cada una de las funciones del ejercicio 9 escribir la expresión de la diferencial en $x_0 = 9$.

12.- Verificar las siguientes desigualdades:

i) $\operatorname{sen}(x) + \operatorname{tg}(x) > 2x \quad , \quad 0 < x < \pi/2$

ii) $\operatorname{arctg}(x) < x \quad , \quad x > 0.$

iii) $\ln(1+x) > \dfrac{\operatorname{arctg}(x)}{1+x}$ $(x > 0)$ [Indicación: usar ii)]

13.- Hallar los siguientes límites. [Observación: si el límite global no existe se calcularán los límites laterales, si es posible]

i) $\lim_{x\to 0} \left[\operatorname{tg}(x + \pi/4) \right]^{\frac{1}{\operatorname{sen}(x)}}$

ii) $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^{ax} - 1}{\operatorname{sen}(bx)}$

iii) $\lim_{x\to 0} \left[\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{\operatorname{tg}^2(x)} \right]$

iv) $\lim_{x\to 0} \left[\operatorname{tg}(x) + x \right]^{\operatorname{sen}(x)}$

v) $\lim_{x\to 1} \left[\dfrac{x}{x-1} - \dfrac{1}{\ln x} \right]$

vi) $\lim_{x\to 1} \left[\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}x\right) \right]^{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}x\right)}$

vii) $\lim_{x\to 0} x^{[x^x - 1]}$

viii) $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen}(x) \cdot e^{\frac{1}{1-\cos(x)}}$

ix) $\lim_{x\to 2} \operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{2}x\right) \ln\left[2 - \frac{x}{2}\right]$

x) $\lim_{x\to 0} \left[\dfrac{\ln(1+x)}{x^2} - \dfrac{1}{x(x+1)} \right]$

xi) $\lim_{x\to 0} x\, e^{1/x}$

xii) $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}$

xiii) $\lim_{x\to 0} \left[\dfrac{x^2 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)}{\operatorname{sen}(x)} \right]$ (Indicación: No se puede aplicar L'Hô;

14.- $I(t) = \dfrac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{Rt}{L}}\right) \qquad E, R, L > 0.$

Considerando t fijo, hallar $\lim_{R\to 0^+} I(t)$

15.- $f(t) = \dfrac{A}{c^2 - k^2}\left[\operatorname{sen}(k\,t) - \operatorname{sen}(c \cdot t)\right]$, $A, c, k > 0$
$c \neq k$.

Considerando t fijo, hallar $\lim\limits_{c \to k} f(t)$

16.- Siete límites sencillos.

$l_1 = \lim\limits_{x \to 0^+}\left[e^{-\frac{\ln(7)}{x}}\right]^{-x}$; $l_2 = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{7\operatorname{sen}(x)}{x}$

$l_3 = \lim\limits_{x \to 0^+}\left[e^{\frac{1}{x}}\right]^{\ln(7)\cdot x}$; $l_4 = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(1-\cos(x))\,14}{x^2}$

$l_5 = \lim\limits_{x \to 0^+}\left[\dfrac{14}{x} - \dfrac{28}{x^2 + 2x}\right]$; $l_6 = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{7\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{\ln(1+x)}}$

$$l_7 = \lim_{x \to 0}\left[\frac{\operatorname{arcsen}(x)}{x}\right]^{\frac{\ln(7^6)}{x^2}}$$

17.- Representar gráficamente:

i) $f(x) = \dfrac{2x-1}{(x-1)^2}$ ii) $f(x) = \dfrac{x^3}{3 - x^2}$

iii) $f(x) = b - \sqrt[5]{(x-a)^2}$ iv) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 + 3a^2}$

v) $f(x) = e^{1/x} - x$ vi) $f(x) = \ln[\cos(x)]$.

vii) $\left.\begin{array}{l} x = 3\operatorname{sen}(t) \\ y = 4\cos(t) \end{array}\right\}$ viii) $\left.\begin{array}{l} x = t(t-1) \\ y = t^3 - 1 \end{array}\right\}$

ix) $\left.\begin{array}{l} x = t^2 \\ y = t - \frac{t^3}{3} \end{array}\right\}$ x) $\left.\begin{array}{l} x = r(t - \operatorname{sen} t) \\ y = r(1 - \cos t) \end{array}\right\}$

xi) $\left.\begin{aligned} x &= \frac{3 \cdot t}{1+t^3} \\ y &= \frac{3t^2}{1+t^3} \end{aligned}\right\}$ xii) $\left.\begin{aligned} x &= \frac{t}{1-t} \\ y &= \frac{1+t^2}{t^2} \end{aligned}\right\}$

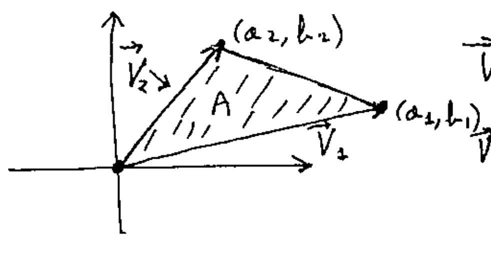
xiii) $\left.\begin{aligned} x &= \frac{t^4}{1-t^2} \\ y &= \frac{t^3}{1-t^2} \end{aligned}\right\}$ xiv) $\left.\begin{aligned} x &= e^t \cdot \operatorname{sen}(t) \\ y &= e^t \cdot \cos(t) \end{aligned}\right\}$.

18.- Un farol situado en el centro de una plazoleta circular la ilumina. ¿A qué altura debe estar para que ilumine lo mejor posible un sendero que la rodea a una distancia R del centro? [Indicación: La iluminación es directamente proporcional al coseno del ángulo de incidencia e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre el foco y la zona iluminada].

19.- En un segmento de longitud L que une dos manantiales de luz de intensidad luminosa I_1 e I_2, halla el punto peor iluminado.

20.- Determinar la altura mínima que debe tener la puerta de una torre circular de diámetro d para introducir por ella (y colocar verticalmente) una viga de longitud l. $(l > d)$.

21.- Dada la elipse $2x^2 + y^2 = 18$ y dos puntos de ella $A = (1, 4)$, $B = (3, 0)$. Hallar el tercer punto C de la elipse tal que el área del triángulo ABC sea la mayor posible.

Indicación: 

(Dimensión tres)

$$\left.\begin{aligned} \vec{V}_1 &= (a_1, b_1, 0) \\ \vec{V}_2 &= (a_2, b_2, 0) \end{aligned}\right\} A = \frac{|\vec{V}_1 \times \vec{V}_2|}{2}$$