Preguntas de clase 3 Fecha: 14 de noviembre de 2007

1.- Estudiar, según los valores de $a \in R$, con $a > 0$ el carácter de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{na^n}$

Solución: Consideremos el criterio de la raíz, o de Cauchy:

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^2+1}{na^n}} = \frac{1}{a}$$

pues $\sqrt[n]{n^2+1} \to 1$, y $\sqrt[n]{n} \to 1$.

Entonces, si $a < 1$, $\lambda > 1$, y por tanto la serie es DIVERGENTE.

Además, si $a > 1$, $\lambda < 1$, y por tanto la serie es CONVERGENTE.

Finalmente, para $a = 1$, resulta la serie: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n}$. Esta serie es claramente DIVERGENTE, pues $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{n} = +\infty$.

2.- Pon un ejemplo de serie geométrica convergente y halla su suma, otro de serie geométrica divergente, y explica qué es la serie harmónica generalizada y cuándo es convergente y divergente.

Solución: Una serie geométrica es de de la forma $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_0 r^n$. a_0 es el primer término, y r es la razón. Si $|r| < 1$, la series es convergente. Si $|r| \geq 1$ la serie es no convergente. La suma de una serie geométrica convergente es $\displaystyle\frac{a_0}{1-r}$. Por ejemplo $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$. Un ejemplo de S.G. Divergente es $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 2^n = +\infty$.

La serie armónica generalizada es de la forma $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, con $p \in R$ un número constante. Si $p \leq 1$, la serie es Divergente, y si $p > 1$, la serie es Convergente.

3.- Halla el carácter de la serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}$

Solución: La serie es alternada. Aplicamos el teorema de Leibnitz.

Nótese que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\ln n} = 0$, y además la función $f(x) = \dfrac{1}{\ln x}$ es decreciente, porque $\ln x$ es creciente y la función $\dfrac{1}{x}$ es decreciente, y por ello, la composición de las dos es decreciente. El teorema de Leibnitz nos asegura en este caso que la serie alternada original es CONVERGENTE.

Las otras Preguntas de clase 3 fueron:

1.- Explica qué es la serie harmónica generalizada y cuándo es convergente y divergente. Pon un ejemplo de serie geométrica convergente y halla su suma, otro de serie geométrica divergente. (No se piden demostraciones, sino resultados escuetos).

2.- Estudiar, según los valores de $a \in R$, con $a > 0$ el carácter de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{na^n}{n^2+1}$

3.- Halla el carácter de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n+1)}$