Preguntas de clase 2 Fecha: 24 de octubre de 2008

1.- Calcular el límite siguiente:

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln 1 + \ln 2 + \cdots + \ln n}{\ln n^n}$$

Solución: Utilizamos el criterio de Stolz y resulta:

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\ln n^n - \ln (n-1)^{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\ln \dfrac{n^n}{(n-1)^{n-1}}}$$

Ahora, como $\dfrac{n^n}{(n-1)^{n-1}} = n\dfrac{n^{n-1}}{(n-1)^{n-1}} = n\left(\dfrac{n}{n-1}\right)^{n-1}$, mediante las propiedades de los logaritmos, se tiene:

$$\ln\left(n\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1}\right) = \ln n + \ln\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1}$$

que, sustituido en lo que teniamos, resulta

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\ln n + \ln\left(\dfrac{n}{n-1}\right)^{n-1}}$$

Nótese que $\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n-1}\right)^{n-1} = e$, y $\ln e = 1$ con lo que tenemos:

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\ln n + 1} = 1$$

2.- Usando la determinación principal del logaritmo, halla el módulo y el argumento del número complejo $(\ln i)^i$

Solución: Como $z^w = e^{w \ln z}$, tenemos $(\ln i)^i = e^{i \ln(\ln i)}$.

$$\begin{aligned}
\ln i &= \ln 1 + \frac{\pi}{2}i = \frac{\pi}{2}i \\
\ln\left(\frac{\pi}{2}i\right) &= \ln\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2}i \\
i\left(\ln\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2}i\right) &= -\frac{\pi}{2} + i\ln\left(\frac{\pi}{2}\right)
\end{aligned}$$

Ahora usamos que e^{a+bi} es un número complejo de módulo e^a y argumento b. Por tanto el módulo pedido es $e^{-\frac{\pi}{2}}$ y el argumento es $\ln\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$.

3.- Escribe las fórmulas exponenciales de Sh z, sen z, Ch z, cos z.