Nombre y Apellidos:

Preguntas de clase 3 Fecha: 7 de noviembre de 2008

1.- Calcular el límite siguiente:

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln 1 + \ln 2 + \cdots + \ln n}{(n+1)\ln n}$$

Solución: Podemos aplicar propiedades de los logaritmos en el numerador, de forma que $\ln 1 + \ln 2 + \cdots + \ln n = \ln(1 \cdot 2 \cdots n) = \ln(n!)$. De esta manera el límite resulta:

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln 1 + \ln 2 + \cdots + \ln n}{(n+1)\ln n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n!)}{(n+1)\ln n}$$

Ahora usamos la fórmula de Sirling ($n! \sim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$) en el numerador:

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n})}{(n+1)\ln n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\ln n - n\ln e + \ln\sqrt{2\pi n}}{(n+1)\ln n}$$

Descomponiendo el límite anterior en suma de tres límites, se llega a que $\boxed{L = 1.}$

2.- Calcular el límite siguiente:

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2}{1} + \frac{3^2}{2} + \cdots + \frac{(n+1)^n}{n^{n-1}}}{1 + 2 + \ldots + n}$$

Solución: Podemos aplicar el criterio de Stolz para poner:

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2}{1} + \frac{3^2}{2} + \cdots + \frac{(n+1)^n}{n^{n-1}}}{1 + 2 + \ldots + n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^n}{n^{n-1}}}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n}{n^n} = e$$

Donde, en el último límite se ha aplicado el número e.

3.- Hallar el carácte de la serie siguiente

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 7n}{n2^n}$$

Solución: Consideremos el criterio de la raíz, o de Cauchy:

$$L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^2+7n}{n2^n}} = \frac{1}{2}$$

pues $\sqrt[n]{n^2+7n} \to 1$, y $\sqrt[n]{n} \to 1$.

Como $L = \dfrac{1}{2} < 1$, la serie es CONVERGENTE.

Las otras preguntas fueron las siguientes. Su solución es similar a las anteriores:

1.- Calcular el límite siguiente:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2}{1} + \frac{3^2}{2} + \cdots + \frac{(n+1)^n}{n^{n-1}}}{2+3+\ldots+(n+1)}$$

2.- Calcular el límite siguiente:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln 2 + \ln 3 + \cdots + \ln(n+1)}{(n+1)\ln n}$$

3.- Hallar el carácte de la serie siguiente

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+n}{n2^n}$$