1.- Sabiendo que $f(n)=\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^n+\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^n$ calcúlese $f(n+4)+f(n)$.

Solución

Escribiendo los números en forma módulo-argumento se tiene:

$f(n)=\left(\dfrac{\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}}{\sqrt{2}}\right)^n+\left(\dfrac{\sqrt{2}e^{\frac{-\pi}{4}i}}{\sqrt{2}}\right)^n$ y haciendo las operaciones resulta

$f(n)=\left(e^{\frac{\pi}{4}i}\right)^n+\left(e^{\frac{-\pi}{4}i}\right)^n=e^{n\frac{\pi}{4}i}+e^{-n\frac{\pi}{4}i}$

□

2.- Hallar todas las soluciones de la ecuación $\dfrac{3}{5}i=\operatorname{tg}z$.

Solución (ver Soler-Bronte-Marchante, pág. 738, problema nº 65.):

Nótese que $\operatorname{tg}z=\dfrac{\operatorname{sen}z}{\cos z}=\dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{i\left(e^{iz}+e^{-iz}\right)}=-i\dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{e^{iz}+e^{-iz}}$, por tanto la ecuación inicial resulta $\dfrac{3}{5}i=-i\dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{e^{iz}+e^{-iz}}$, es decir $-\dfrac{3}{5}=\dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{e^{iz}+e^{-iz}}$, luego $-\dfrac{3}{5}=\dfrac{e^{2iz}-1}{e^{2iz}+1}$; $e^{2zi}=\dfrac{1}{4}$. Entonces $2zi=\ln(1/4)=-2\ln 2+2k\pi i$ para $k\in Z$. El resultado pedido es pues $z=k\pi+i\ln 2$.

□

3.- Escribir en función racional de a y b la expresión: $z=\operatorname{tg}\left[iL\left(\dfrac{a+bi}{a-bi}\right)\right]; a,b\in R$, tomando la rama principal (k=0) del logaritmo neperiano.

Solución

4.- Hallar: 1º) La parte real e imaginaria de $z=(2+i)^{4-3i}$;

2º) ¿En que punto del plano complejo es real $\operatorname{sen}z$?

Solución (ver pág. 716 Bronte).

5.- Hallar z tal que $\operatorname{sen}z+3\cos z=1$.

Solución

Empleando las fórmulas exponenciales para el seno y el coseno la ecuación se transforma en:
$\dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}+3\dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}=1$, donde haciendo el cambio de variable $T=e^{zi}$ y quitando denominadores queda:
$T^2-1+3i\left(T^2+1\right)=2iT$ y por tanto $(1+3i)T^2-2iT-1+3i=0$. Resolviendo esta ecuación de segundo grado obtenemos:
$T=\dfrac{2i+\sqrt{-4-4(1+3i)(-1+3i)}}{2(1+3i)}=\dfrac{i+\sqrt{-1-(-1-9-3i+3i)}}{1+3i}=\dfrac{i+\sqrt{-1+10}}{1+3i}=\dfrac{\pm 3+i}{1+3i}$.
De donde haciendo el cociente se obtiene:

$T = \frac{\pm 3 + i}{1+3i} = \frac{(\pm 3 + i)(1-3i)}{10} = \frac{\pm 3 \mp 9i + i + 3}{10}$. Es decir se obtienen dos soluciones para *T*:

$T_1 = \frac{3-9i+i+3}{10} = \frac{6-8i}{10} = \frac{3-4i}{5}$, y $T_2 = \frac{-3+9i+i+3}{10} = \frac{10i}{10} = i$. Para $T_1 = \frac{3-4i}{5}$,

$iz = \ln T_1 = \ln\left|\frac{3-4i}{5}\right| + (\operatorname{arctg}(-4/\ \ ) + 2k\pi)i = (\operatorname{arctg}(-4/\ \ ) + 2k\pi)i$, es decir $z = \operatorname{arctg}(-4/\ \ ) + 2k\pi$.

Para $T_2 = i$, $iz = \ln T_2 = \ln|1| + (\pi/\ \ + 2k\pi)i = (\pi/\ \ + 2k\pi)i$, es decir $z = \pi/2 + 2k\pi$. □

6.- Resolver $\left(\frac{1+ix}{1-ix}\right)^2 = \frac{1+i\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}}{1-i\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}}$ siendo θ un número real dado.

Solución:

Utilizando la forma polar de un número complejo, la ecuación se puede escribir como $\left(\frac{\sqrt{x^2+1}_{\operatorname{arctg} x}}{\sqrt{x^2+1}_{-\operatorname{arctg} x}}\right)^2 = \frac{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}}_{\frac{\theta}{2}}}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}}_{-\frac{\theta}{2}}}$, de donde $\left(1_{2\operatorname{arctg} x}\right)^2 = 1_\theta$, luego $1_{4\operatorname{arctg} x} = 1_\theta$, y por tanto se tiene la siguiente relación entre los argumentos $4arctgx = \theta + 2k\pi$, siendo *k* cualquier número entero. Es decir $x = \operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{4} + \frac{k\pi}{2}\right)$.

□

7.- Calcular $\sqrt[i]{2+\ln i}$.

Solución: (ver Soler, Bronte, Marchante, pag. 719):

Sea $z = \sqrt[i]{2+\ln i}$. Entonces $\ln z = \ln(2+\ln i)/i = \ln\big(2+\ln 1+(\pi/2+2k\pi)i\big)/i$. Como $\ln 1 = 0$, resulta

$\ln z = \ln\big(2+(\pi/2+2k\pi)i\big)/i = \left(\ln\sqrt{4+(\pi/2+2k\pi)^2} + (\operatorname{arctg}\pi/4+2k\pi)i\right)/i$.

Realizando el cociente se tiene:

$\ln z = \ln\big(2+(\pi/2+2k\pi)i\big)/i = (\operatorname{arctg}\pi/4+2k\pi) - i\ln\sqrt{4+(\pi/2+2k\pi)^2}$ y por tanto el valor pedido es

$$z = e^{(\operatorname{arctg}\pi/4+2k\pi) - i\ln\sqrt{4+(\pi/2+2k\pi)^2}}.$$

□

8.- Resolver la ecuación $\operatorname{sen} z = 3$.

Solución:

Como $\operatorname{sen} z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$, la ecuación resulta $\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} = 3$, de donde $e^{iz} - e^{-iz} = 6i$ y haciendo el cambio de variable $e^{iz} = T$ tenemos $T - T^{-1} = 6i$, es decir $T^2 - 6iT - 1 = 0$ que tiene por soluciones:

$T^2 - 6iT - 1 = \frac{6i+\sqrt{-36+4}}{2} = 3i \pm 2\sqrt{2}i = \left(3 \pm 2\sqrt{2}\right)i$, y por tanto

$iz = \ln\left(\left(3 \pm 2\sqrt{2}\right)i\right) = \ln\left(3 \pm 2\sqrt{2}\right) + (\pi/2 + 2k\pi)i$, es decir
$z = (\pi/2 + 2k\pi) - i\ln\left(3 \pm 2\sqrt{2}\right)$.

□

9.- Sabiendo que u es real, calcular el valor de z sabiendo que se verifican las dos condiciones siguientes:

$$\left.\begin{array}{r} u = (a+bi)^{(x+yi)} \\ z = \dfrac{y}{2}L\left(a^2+b^2\right) + xarctg\dfrac{b}{a} \end{array}\right\}$$

Solución:

Hallemos en primer lugar el valor de u. Tomando logaritmos neperianos $\ln u = (x+yi)\ln(a+bi) = (x+yi)\left(\ln\sqrt{a^2+b^2} + \left(arctg(b/a) + 2k\pi\right)i\right) =$

$$= x\ln\sqrt{a^2+b^2} - y\left(arctg(b/a) + 2k\pi\right) + i\left[x\left(arctg(b/a)+2k\pi\right) + y\ln\sqrt{a^2+b^2}\right]$$

Por tanto $u = e^{x\ln\sqrt{a^2+b^2} - y\left(arctg(b/a)+2k\pi\right) + i\left[x\left(arctg(b/a)+2k\pi\right)+y\ln\sqrt{a^2+b^2}\right]}$. Si en el logaritmo tomamos sólo la rama principal, se tiene que $z = Arg(u)$, y teniendo en cuenta que u es un número real se obtiene el resultado: $z = 0 + 2k\pi$, ó $z = \pi + 2k\pi$, que puede resumirse como $z = k\pi$, siendo k cualquier número entero. □

10.- Hallar z tal que $tgz = i$.

Solución:

$$tgz = \frac{\operatorname{sen} z}{\cos z} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{i\left(e^{iz} + e^{-iz}\right)} = i \Rightarrow \frac{e^{2iz} - 1}{e^{2iz} + 1} = -1 \Rightarrow 2e^{2iz} = 0 \Rightarrow e^{2iz} = 0$$

de donde: $2iz = L0$, pero esto es imposible, luego no hay Solución: para la ecuación.

11.- Hallar un número entero z tal que $A = \exp\left(L\dfrac{2-zi}{1+i}\right)$ sea número real.

Solución:

$$A = \exp\left(L\frac{2-zi}{1+i}\right) = \frac{2-zi}{1+i} = \frac{(2-zi)(1-i)}{2} = \frac{2-z}{2} + \frac{-2-z}{2}i \in R \Rightarrow -2-z = 0 \Rightarrow z = -2$$

□

12.- En cada caso determinar los números reales x e y que verifiquen la relación dada:

a) $\sum_{k=0}^{100} i^k = x + iy$. **b)** $xe^{iy} = x + iy$

Solución:

a) Como $\sum_{k=0}^{100} i^k = \dfrac{1-i^{100}i}{1-i} = \dfrac{1-i}{1-i} = 1$ se tiene $\boxed{x = 1,\ y = 0}$.

□

b) Como $\left|xe^{iy}\right| = |x|$, y $|x+iy| = \sqrt{x^2+y^2}$**,** se tiene $\boxed{y = 0,\ \text{y } x \text{ cualquiera}}$.

□

13.- Expresar en forma binómica dos números complejos z y w tales que verifiquen las dos condiciones siguientes:

a) El valor principal de $L(z\cdot w)$ es igual a $\frac{3\pi}{2}i$.

b) El número $-\sqrt{2}-i\sqrt{2}$ es una de las raíces de $\sqrt{z/w}$.

Solución:

Tomando exponenciales en $L(z\cdot w) = \frac{3\pi}{2}i$, resulta $z\cdot w = e^{\frac{3\pi}{2}i}$, es decir $z\cdot w = -i$.

Por otro lado, $\left(-\sqrt{2}-i\sqrt{2}\right)^2 = z/w$, de donde $z/w = \left(2_{5\pi/4}\right)^2 = 4_{10\pi/4} = 4_{5\pi/2} = 4_{\pi/2}$, es decir $z/w = 4i$.

Resolviendo el sistema de dos ecuaciones hallado tenenemos $z = \pm 2,\ w = \mp i/2$.

□

14.- Sabiendo que u es real, calcular el valor de z sabiendo que se verifican las dos condiciones siguientes:

$$\left.\begin{array}{c} u = (a+bi)^{(x+yi)} \\ z = \dfrac{y}{2}L\left(a^2+b^2\right) + xarctg\dfrac{b}{a} \end{array}\right\}$$

Solución:

Puesto que un dato del problema es que u es real, calculemos u e impongamos que su parte imaginaria es cero. De ahí se deducirá el valor de z pedido.

$u = (a+bi)^{(x+yi)} \Rightarrow \ln u = (x+yi)\ln(a+bi) = (x+yi)\left(\ln\sqrt{a^2+b^2} + \left(\text{arctg}\,\frac{b}{a} + 2k\pi\right)i\right)$d

e donde:

$\ln u = x\ln\sqrt{a^2+b^2} - y\left(arctg\,\frac{b}{a} + 2k\pi\right) + \left(y\ln\sqrt{a^2+b^2} + x\left(\text{arctg}\,\frac{b}{a} + 2k\pi\right)\right)i$

Nótese que el valor pedido z es igual a la parte imaginaria de $\ln u$, haciendo $k = 0$. Teniendo en cuenta que u es real,$\text{Im}(\ln u) = k\pi$, y por tanto $\boxed{z = k\pi}$.

□

15.- Obtener el valor del producto de las n soluciones distintas de la ecuación $z^n = 1$.

Solución:

Las n soluciones distintas de la ecuación $z^n = 1$ son $z = \sqrt[n]{1} = \left\{e^{2k\pi i/n},\ \text{con } 0 \le k \le n-1\right\}$. Por tanto, el producto será igual a

$P=\prod_{k=0}^{n-1}e^{2k\pi i/n}=e^{\sum_{k=0}^{n-1}2k\pi i/n}$. De donde, calculando el exponente se obtiene

$\sum_{k=0}^{n-1}2k\pi i/n=\frac{2\pi i}{n}\sum_{k=0}^{n-1}k=\frac{2\pi i}{n}\cdot\frac{(n-1)n}{2}=(n-1)\pi i$, y por tanto

$P=e^{(n-1)\pi i}=\left(e^{\pi i}\right)^{(n-1)}=(-1)^{(n-1)}$

□

Otra solución:

Se puede hacer el problema considerando la factorización del polinomio $z^n-1=0$, conocidas sus raices, pues entonces: $z^n-1=\left(z-z_1\right)\cdot\left(z-z_2\right)\cdot\ldots\cdot\left(z-z_n\right)$. De donde, igualando los términos independientes se tiene: $-1=\left(-z_1\right)\cdot\left(-z_2\right)\cdot\ldots\cdot\left(-z_n\right)$, es decir: $-1=(-1)^n\cdot z_1\cdot z_2\cdot\ldots\cdot z_n\Rightarrow z_1\cdot z_2\cdot\ldots\cdot z_n=(-1)^{n-1}$.

□

16.- Obtener todos los posibles valores del complejo *z* que verifican la expresión siguiente, indicando la parte real e imaginaria: $Sh\,z=\left(e^{\pi i}\right)^{1+i}$

Solución:

Como $\left(e^{\pi i}\right)^{1+i}=e^{\pi i(1+i)}=e^{\pi i-\pi}=\frac{-1}{e^{\pi}}$, y $Sh\,z=\frac{e^z-e^{-z}}{2}$, la ecuación inicial se puede escribir como $\frac{e^z-e^{-z}}{2}=\frac{-1}{e^{\pi}}$. Haciendo el cambio $e^z=T$, se transforma en la ecuación de 2º grado: $\frac{T-\frac{1}{T}}{2}=\frac{-1}{e^{\pi}}$, es decir $T^2+\frac{2}{e^{\pi}}T-1=0$, de donde se obtiene: $T=\frac{-\frac{2}{e^{\pi}}\pm\sqrt{\frac{4}{e^{2\pi}}+4}}{2}=-1\pm\sqrt{1+\frac{1}{e^{2\pi}}}$. Deshaciendo el cambio de variable: Si $T=-1+\sqrt{1+\frac{1}{e^{2\pi}}}$, $z=\ln\left(-1+\sqrt{1+\frac{1}{e^{2\pi}}}\right)=\ln\left(-1+\sqrt{1+\frac{1}{e^{2\pi}}}\right)+(2k\pi)i$. Por otro lado, si $T=-1-\sqrt{1+\frac{1}{e^{2\pi}}}$, entonces $z=\ln\left(-1-\sqrt{1+\frac{1}{e^{2\pi}}}\right)=\ln\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{e^{2\pi}}}\right)+(\pi+2k\pi)i$

Por tanto las soluciones son: $\operatorname{Re}(z)=\ln\left(-1+\sqrt{1+\frac{1}{e^{2\pi}}}\right)$; $\operatorname{Im}(z)=2k\pi i$

$\operatorname{Re}(z)=\ln\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{e^{2\pi}}}\right)$; $\operatorname{Im}(z)=(\pi+2k\pi)i$

□