

## PROBLEMAS DE TOPOLOGÍA Y MÉTRICA

- 1.- Sean  $A = (0,1) \cap \mathbb{Q}$  y  $B = (0,1) \cap (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$  en  $\mathbb{R}$  con la topología usual. Calcular  $\overline{A \cup B}$ ,  $\overline{A} \cup \overline{B}$ ,  $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B}$ ,  $\text{int}(A \cup B)$ . (Feb-2000)
- 2.- En la recta real, con la métrica usual se considera el subconjunto  $A = (3,4] \cap \mathbb{Q}$ . Calcular  $\overset{\circ}{A}$ ,  $A'$  y  $\text{aisl}(A)$ . (Dic-2000)
- 3.- Dar un ejemplo de una familia de intervalos abiertos cuya intersección sea un intervalo cerrado. ¿Es posible dar un ejemplo de una familia de intervalos cerrados cuya intersección sea cerrado?, ¿por qué? (Feb-2001)
- 4.- En el conjunto de los números reales con la distancia Euclídea (topología usual) dar un ejemplo de un conjunto con interior vacío y con dos puntos de acumulación. Hallar el conjunto de sus puntos aislados. (Jun-2001)
- 5.- Escribir la definición de punto interior, punto adherente, punto frontera y punto de acumulación de un conjunto. Hallar el interior, la adherencia, la frontera y el conjunto de los puntos de acumulación de  $A = (-2,-1) \cup (-1,0) \cup \left\{ \frac{1}{n} \right\}_{n=1}^{\infty} \cup [2,3)$ .
- 6.- Sea el conjunto de números reales  $A = \left\{ \left( \frac{n+1}{n} \right)^n, \text{ con } n \in \mathbb{N} \right\} \cup \{5\} \cup ((6,7) \cap \mathbb{Q})$ . Hallar razonadamente  $\text{Fr}(A)$ ,  $\overline{A}$ ,  $\overset{\circ}{A}$ . (Dic-2001)
- 7.- Sea  $A$  un conjunto de números reales. Definir  $\text{Fr}(A)$ ,  $\overline{A}$ ,  $\overset{\circ}{A}$ . Razonadamente demostrar o poner un ejemplo en contra de las siguientes expresiones:
- 1)  $\text{Fr}(A) = \overline{A} - \overset{\circ}{A}$ ,
  - 2)  $\text{Fr}(A) = A - \overset{\circ}{A}$ . (Feb-2002)
- 8.- Sea  $A = ((1,2) \cap \mathbb{Q}) \cup [2,3]$ . Hallar  $\overset{\circ}{A}$ ,  $\text{Ext}(A)$  y  $\text{Fr}(A)$ . (Dic-2003)
- 9.- Sea  $A = \left\{ \frac{1}{3^n}, \text{ con } n \in \mathbb{N} \right\} \cup [-1,0)$ . Hallar razonadamente  $\overset{\circ}{A}$ ,  $\text{Ext}A$ , y  $\text{Fr}A$ . (Feb-2004)
- 10.- Sea  $\mathbb{N} = \{1,2,3,\dots\}$  el conjunto de los números naturales. Hallar razonadamente los conjuntos:  $\overset{\circ}{\mathbb{N}}$ ,  $\text{Ext}\mathbb{N}$ , y  $\text{Fr}\mathbb{N}$ . (Jun-2002)
- 11.- Sean  $A = ((0,1] \cap \mathbb{Q}) \cup [5,6)$ . Hallar  $\overset{\circ}{A}$ ,  $\text{Ext}A$ , y  $\text{Fr}A$ . (Sep-2004)
- 12.- Sea  $A$  el conjunto de los números primos positivos. Hallar  $\overset{\circ}{A}$ ,  $\text{Ext}A$ , y  $\text{Fr}A$ . (Feb-2005)
- 13.- Sea  $A = \left(-1, \frac{1}{2}\right] \cap \mathbb{Q}$ .
- a) Hallar, razonadamente  $\overset{\circ}{A}$ ,  $\text{Ext}A$ , y  $\text{Fr}A$ .

b) Dar un ejemplo de dos conjuntos disjuntos de números reales  $A$  y  $B$  que tengan interior vacío y tales que  $A \cup B$  sea un intervalo cerrado. (Feb-2007)

**14.-** Sea  $A$  el conjunto de los números primos positivos. Hallar  $\overset{\circ}{A}$ ,  $ExtA$ , y  $FrA$ . (Dic-2005)

**15.-** Sea  $A = (3, 4] \cap \mathbb{Q}$ . Hallar, razonadamente  $\overset{\circ}{A}$ ,  $ExtA$ , y  $FrA$ . (Dic-2006)

**16.-** Sea  $\mathbb{Q}^+$  el conjunto de los números racionales positivos. Hallar razonadamente los conjuntos:  $\overset{\circ}{\mathbb{Q}^+}$ ,  $Ext(\mathbb{Q}^+)$ , y  $Fr(\mathbb{Q}^+)$ . (Jun-2006)

**17.-** Sea  $A = ((-1, 1) \cap \mathbb{Q}) \cup [3, 6)$ . Hallar justificadamente  $\overset{\circ}{A}$ ,  $Ext(A)$ , y  $Fr(A)$ . (Sep-2006)

**18.-** Dada una sucesión de números reales, definir punto de aglomeración de la sucesión y punto límite. Hallar los puntos de aglomeración y los puntos límites de la sucesión definida por  $\{x_n\} = \left\{ (-1)^n + \frac{1}{2n}, \text{ con } n \in \mathbb{N} \right\}$ . (Sep-2007)

**19.-** Sea  $A = [-1, 0) \cup \{1\} \cup ([2, 3] \cap \mathbb{Q})$ . Hallar  $\overset{\circ}{A}$ ,  $Ext(\overset{\circ}{A})$ ,  $Fr(A)$ ,  $\overline{A}$ .

**20.-** Sea  $A = ([-1, 1] - \{0\}) \cup ([3, 5] \cap \mathbb{Q})$ . Hallar  $\overset{\circ}{A}$ ,  $Ext(A)$ ,  $Fr(A)$ ,  $\overline{\overset{\circ}{A}}$ ,  $Fr(\overset{\circ}{A})$ .

**21.-** Sea  $E = \left\{ x \text{ tal que } x = \frac{1}{n} + \frac{1}{m}, n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N} \right\}$  con la topología usual. Hallar el conjunto derivado de  $E$ . Deducir si  $E$  es cerrado o no. (Sep-1998)

**22.-** Sea el conjunto de la recta real  $A = [0, 2] \setminus \{1\} \cup \{3\} \cup \{ \emptyset \cap [4, 5] \}$  con la topología usual. Hallar los siguientes conjuntos:  $\overset{\circ}{A}$ ,  $\overline{A}$ ,  $\overset{\circ}{\overline{A}}$ , y  $\overset{\circ}{A}$ . (Feb-1999)

**23.-** Sea  $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ . Definir los conjuntos  $\overset{\circ}{A}$ ,  $Ext(A)$ ,  $Fr(A)$ . (Jun-2007)

**24.-** Sea  $\mathbb{Z}$  el conjunto de los números enteros. Hallar razonadamente los conjuntos:  $\overset{\circ}{\mathbb{Z}}$ ,  $Ext\mathbb{Z}$ , y  $Fr\mathbb{Z}$ . (Feb-2006)