Sucesiones y límites de sucesiones

1.- Una sucesión es una lista de números. Se escribirá: $\{a_n\}$.

Ejemplo 1.- $\{a_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right\}$.

Es sabido que $\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0}$. También ocurre que $\boxed{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1}$.

- En general, se dice que $\lim_{n\to\infty} a_n = L$, siendo L un número (real o complejo) si los términos de la sucesión $\{a_n\}$ están cada vez más cerca del número L. En ese caso se dice que la sucesion es CONVERGENTE.

- Si, $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, se dice que la sucesión es DIVERGENTE.

- Si $\lim_{n\to\infty} a_n$ no existe, se dice que la sucesión es OSCILANTE.

Ejemplos:

$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$. La sucesión $\left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}$ es convergente.

$\lim_{n\to\infty} \left(2 + \frac{1}{n}\right)^n = 2^\infty = \infty$. La sucesión $\left\{\left(2 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}$ es divergente.

$\lim_{n\to\infty} \left(-1 + \frac{1}{n}\right)^n = (-1)^\infty$ no existe el límite. La sucesión $\left\{\left(-1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}$ es oscilante.

Criterio de Stolz: Si $b_n > 0$ y $B_n \to \infty$ entonces

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{A_n}{B_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{A_n - A_{n-1}}{B_n - B_{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$ si el último límite existe.

Aplicaciones:

- (C.M.A) Si $a_n \to a$, entonces $\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \to a$.

- (C.M.G.) Si $a_n \to a$, entonces $\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n} \to a$, siendo $a, a_n \geq 0$.

- (C.C.R.) Si $\frac{a_n}{a_{n-1}} \to a$, entonces $\sqrt[n]{a_n} \to a$.

Ejemplos: (Preguntas de examen, desde 2004 hasta la fecha)

- $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{2+3\sqrt{2}+\cdots+(n+1)\sqrt[n]{n}}{n^2-n}$.

- Sea $\{a_n\}$ una sucesión de términos positivos y tal que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Hallar el límite siguiente:
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\ln(1+a_1)}{a_1} + 2\frac{\ln(1+a_2)}{a_2} + \cdots + n\frac{\ln(1+a_n)}{a_n}}{n^2}.$$

- Sea $\{a_n\}$ una sucesión de términos positivos y tal que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = k > 0$. Hallar, en función de α ($\alpha > 0$) el límite siguiente:
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + 2^\alpha a_2 + \cdots + n^\alpha a_n}{n^2}.$$

- $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{\ln n}$; $\quad\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n+1}}{\ln n}$.

- $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{e^3+e^{3/2}+\cdots+e^{3/n}}{\cos(\pi/4)+\cos(\pi/5)+\cdots+\cos(\pi/(4+n))}$. (Ver solución en la web: Febrero 2006).

- Sea $\{x_n\}$ una sucesión de términos positivos y tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a > 0$. Hallar el límite siguiente:
$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_1 \operatorname{sen} 1 + x_2 \operatorname{sen}(1/2) + \cdots + x_n \operatorname{sen}(1/n)}{\ln n}.$$

- Sea $f(x) = 3e^{2x}$. Hallar $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{\left(f^{(n)}(0)\right)^2}{8^n}}$.

- $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[3]{8n^3+2n^2} - \sqrt{4n^2+1}\right)$.

- $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2}{1}+\frac{3^2}{2}+\frac{4^3}{3}+\cdots+\frac{(n+1)^n}{n^{n-1}}}{n^2}$. Ver solución en el examen de Febrero de 2007.

- $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2}{1}+\frac{3^2}{2}+\frac{4^3}{3}+\cdots+\frac{(n+1)^n}{n^{n-1}}}{2+3\sqrt{2}+\cdots+(n+1)\sqrt[n]{n}}$.

- $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{2+3\sqrt{2}+\cdots+(n+1)\sqrt[n]{n}}{n^2+n-1}$.