UNIVERSIDAD DE LAS PALMAS DE GRAN CANARIA
Departamento de Matemáticas

E.T.S.I.T. – 05/2006
PRIMER CURSO
CÁLCULO – 09.12.05
Test diferenciabilidad varias variables

1.- Estudiar en el origen la existencia de derivadas parciales y la diferenciabilidad de la función siguiente:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2+xy}{x^2+y^2}\,y & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Derivadas parciales en el origen:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{h^2+h0}{h^2+0^2}0-0}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0}{h}=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{k\to 0}\frac{\dfrac{0^2+0k}{0^2+k^2}k-0}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{0}{k}=0$$

Diferenciabilidad en el origen: Puesto que las dos derivadas parciales en el origen existen, comprobamos si el límite siguiente resulta cero o no:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\dfrac{h^2+hk}{h^2+k^2}k-0-0h-0k}{\sqrt{h^2+k^2}}=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{h^2k+hk^2}{\left(h^2+k^2\right)^{3/2}}=\text{(en polares)}=$$

$$=\lim_{r\to 0}\frac{r^2\cos^2\alpha r\operatorname{sen}\alpha+r\cos\alpha r^2\operatorname{sen}^2\alpha}{r^3}=\cos^2\alpha\operatorname{sen}\alpha+\cos\alpha\operatorname{sen}^2\alpha$$

que, como se ve, no es igual a CERO, puesto que depende de α, y por tanto, la función NO ES DIFERENCIABLE en el origen.