UNIVERSIDAD DE LAS PALMAS DE GRAN CANARIA
Departamento de Matemáticas

E.T.S.I.T. – 05/2006
PRIMER CURSO
CÁLCULO – 24.11.05
Test Series y Taylor

1.- Estudiar el carácter de la serie siguiente según los valores de α:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\left(a^2+1\right)^n}.$$

Evaluamos en primer lugar el límite del término general de la serie:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\left(a^2+1\right)^n} = \begin{cases} 0 & \text{si } a \neq 0 \\ +\infty & \text{si } a = 0 \end{cases}$$

Por tanto la serie es divergente si $a = 0$

En el caso $a \neq 0$ aplicamos el criterio de la raíz:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n}{\left(a^2+1\right)^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{a^2+1} = \frac{1}{a^2+1} < 1 \text{ si } a \neq 0$$ y por tanto la serie es CONVERGENTE.

2.- Escribe la expresión del polinomio de Taylor de *f* en el punto $x = a$. Hallar el polinomio de Taylor de orden *n* de la función $f(x) = x^2 e^x$ en el punto $x = 0$.

El polinomio de Taylor de *f* en el punto $x = a$ es:

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

La segunda parte se hace muy fácilmente teniendo en cuenta el polinomio de Taylor de grado $n-2$ de la función exponencial: $P(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{n-2}}{(n-2)!}$ y por tanto el polinomio de orden *n* de la función $f(x) = x^2 e^x$ será:

$$P_n(x) = x^2 P(x) = x^2\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{n-2}}{(n-2)!}\right) =$$

$$= x^2 + x^3 + \frac{x^4}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{(n-2)!}$$