E.T.S.I.T.
TEOREMAS FUNDAMENTALES DE CONTINUIDAD Y DERIVABILIDAD DE FUNCIONES DE UNA VARIABLE REAL

Teorema de Bolzano
Sea $f:[a,b]\to R$ una función continua tal que $f(a)$ y $f(b)$ tienen distinto signo, entonces hay un punto *c* entre a y b tal que $f(c)=0$.

Geométricamente significa que la gráfica de la función corta al eje X en el punto *c*.

Consecuencia (T. de Darboux)
Sea $f:[a,b]\to R$ una función continua tal que $f(a)\neq f(b)$, entonces para cada valor ξ entre $f(a)$ y $f(b)$ hay un punto *c* entre a y b tal que $f(c)=\xi$.

Geométricamente significa que la gráfica de la función corta a la recta de ecuación $y=\xi$ en el punto *c*.

Teorema de Bolzano-Weierstrass
Sea $f:[a,b]\to R$ una función continua ($[a,b]$ un intervalo cerrado y acotado). Entonces f alcanza el máximo y el mínimo en $[a,b]$, es decir hay dos puntos c_1 y c_2 en $[a,b]$ tales que $f(c_1)=\max f(x)$ con $x\in[a,b]$ y $f(c_2)=\min f(x)$ con $x\in[a,b]$.

Teorema de Heine
Sea $f:[a,b]\to R$ una función continua ($[a,b]$ un intervalo cerrado y acotado). Entonces f es uniformemente continua en $[a,b]$.

Teorema de Rolle
Sea $f:[a,b]\to R$ una función continua en el intervalo cerrado $[a,b]$ y derivable en el intervalo abierto (a,b) tal que $f(a)=f(b)$. Entonces hay un punto *c* entre a y b tal que $f'(c)=0$.

Geométricamente significa que la recta tangente a la gráfica de la función en el punto *c* es horizontal.

Teorema de los incrementos finitos de Lagrange
Sea $f:[a,b]\to R$ una función continua en el intervalo cerrado $[a,b]$ y derivable en el intervalo abierto (a,b). Entonces hay un punto *c* entre a y b tal que $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Geométricamente significa que la recta tangente a la gráfica de la función en el punto *c* es paralela a la recta secante a la curva $y=f(x)$ en los extremos del intervalo $[a,b]$.

Teorema de los incrementos finitos de Cauchy
Sean $f:[a,b]\to R$ y $g:[a,b]\to R$ dos funciones continuas en el intervalo cerrado $[a,b]$ y derivables en el intervalo abierto (a,b), con $g(a)\neq g(b)$. Entonces hay un punto *c* entre a y b tal que $\dfrac{f'(c)}{g'(c)}=\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

Se puede observar que desde el punto de vista lógico los tres últimos teoremas son equivalentes. Es decir suponiendo cierto uno de ellos se pueden demostrar los otros.

Teorema (Regla de L'Hopital)
Sean $f:[a,b]\to R$ y $g:[a,b]\to R$ dos funciones continuas en el intervalo cerrado $[a,b]$ y derivables en el intervalo abierto (a,b), con $f(a)=g(a)=0$. Entonces si existe el límite del cociente de las derivadas $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, también existe el límite del cociente de las funciones $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ y son iguales, es decir $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$.

OBS: Como aplicación de los conceptos de Continuidad Uniforme y Funciones Lipsichitzianas, véase problema 15 de la hoja de Límites y continuidad.