“SOBRE EL PROBLEMA DE LA RADIACIÓN DEL CUERPO NEGRO”

Miguel Ángel Padrón
Ángel Plaza

Technical Report. nº 011 - 1999

Nº de Páginas: 36

1999

IUMA

INSTITUTO UNIVERSITARIO DE MICROELECTRÓNICA APLICADA

Universidad de Las Palmas de Gran Canaria – Campus Universitario de Tafira – 35017 – Las Palmas de Gran Canaria – ESPAÑA
Teléfono: + 34 928 451 250 (centralita) – Fax: + 34 928 451 243 — http://www.cma.ulpgc.es/

INDICE

1. PROBLEMÁTICA DEL CUERPO NEGRO 2

2. EL ALCANCE DE LAS LEYES CLÁSICAS EN EL ESTUDIO DEL PROBLEMA 3

3. PLANCK Y LA HISTORIA DE UN FRACASO 13

4. EL IMPACTO DEL CUANTO DE ACCIÓN. 27

5. ACOGIDA DE LA TEORÍA 30

6. CUÁNTICA FICCIÓN 32

BIBLIOGRAFÍA. 36

1. PROBLEMÁTICA DEL CUERPO NEGRO

El estudio del espectro de la radiación térmica emitida por un cuerpo negro, ha sido una de las cuestiones más fecundas de la historia de la Física. Su tratamiento ha servido no sólo para delimitar el alcance de las leyes clásicas sino que también dio origen a las nuevas ramas de la Física que rigen el comportamiento de la naturaleza allí donde no funcionaban las leyes clásicas.

El éxito de la mecánica estadística de Bolztmann en la explicación de la distribución espectral de energía llevada a cabo por Planck confirmó la validez de esta ciencia que implicaba asumir una cierta pérdida de información. La técnica de la discretización de la energía utilizada en el método, se relevó de crucial importancia y encontró asentamiento y realidad física en el estudio de otros problemas que contribuyeron definitivamente al establecimiento de la naturaleza dual del comportamiento de la materia, y que se encuentra implícita en un proceso de interpolación llevado a cabo por el mismo Planck, como ya analizaremos.

Resulta sorprendente notar que la dedicación de Planck tuvo dos nuevos puntos:

- La revolucionaria teoría de Planck, que no encontró inicialmente una gran acogida entre los físicos, fue capaz de confirmar indirectamente la existencia del cuanto de carga. Tenemos por tanto que un proceso tan revolucionario como la discretización de la energía, conducía a la discretización de la carga que cobraba fuerza después de los experimentos de Thompson y Rutherford.
- El estudio de Einstein de las capacidades caloríficas de los sólidos utilizando la cuantización de la energía sirvió para que Nerst posteriormente contribuyera a la Termodinámica con su Tercer Principio, precisamente cuando ésta se mostraba insuficiente para resolver el problema del cuerpo negro.

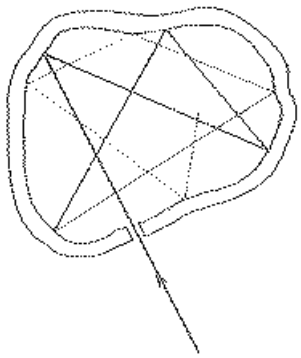
Todos estos resultados justifican la importancia del estudio de un desarrollo histórico. Con el propósito de hacer una reconstrucción fiel de los acontecimientos, comenzamos por definir el concepto de Cuerpo Negro e introducimos los resultados clásicos a los que era capaz de llegar la Termodinámica y el Electromagnetismo Clásico.

2. EL ALCANCE DE LAS LEYES CLÁSICAS EN EL ESTUDIO DEL PROBLEMA.

Cuerpo Negro

Aquel cuerpo que es capaz de absorber toda la radiación térmica que incide sobre él. De ahí el nombre de negro, puesto que no refleja ningún tipo de radiación.

Un ejemplo de cuerpo negro sería "cualquier objeto" cubierto con una capa de pigmentos negros, como negro de humo. Independientemente de los detalles de su composición "todos" los cuerpos negros a la misma temperatura, emiten radiación térmica, exactamente con la misma forma del espectro.



El dispositivo experimental que reproduce más fielmente el comportamiento de un cuerpo negro en contacto con la radiación es el de un orificio practicado en la superficie exterior de una cavidad, cuyas paredes estén recubiertas de negro y esté provisto de un pequeño orificio en su superficie exterior. La radiación procedente del exterior que incide sobre el agujero penetra en la cavidad y es absorbida en las sucesivas reflexiones hacia todos los sentidos en las paredes de dicha cavidad. Si el área del agujero es muy pequeña, comparada con el área de la superficie interna de la cavidad, la radiación reflejada hacia el exterior a través del orificio, será despreciable y esencialmente toda la radiación será absorbida.

Supongamos que hay radiación térmica, en el interior de la cavidad a una temperatura T, la cual entra en contacto con la radiación procedente del exterior, y el sistema global evoluciona irreversiblemente hacia un estado de equilibrio, que será aquel en el cual

cada elemento de la superficie absorbe la misma cantidad de radiación que emite, de no mantenerse la proporción de emisión-absorción se perdería el equilibrio puesto que se calentaría o enfriaría. Este comportamiento físicamente se asemeja al de una cavidad de paredes reflectoras, es decir, cavidad resonante. Esta visión es válida para cuando se ha alcanzado el equilibrio.

Sobre la base de argumentos termodinámicos se podría explicar, algunos hechos experimentales ampliamente contrastados, como es el hecho de que todos los cuerpos negros emiten radiación térmica con el mismo espectro, la Ley de Stephan-Bolztmann, la Ley de Desplazamiento de Wien,... Sin embargo no se podía explicar la forma específica de la curva espectral.

Modelo Clásico para la radiación electromagnética en una cavidad resonante

El campo electromagnético es un fenómeno ondulatorio transversal gobernado por las ecuaciones de Maxwell. Las ecuaciones para el campo en el interior de la cavidad (vacío) vienen dadas por:

$$\vec{\nabla} B = 0$$

$$rot\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$div\vec{E} = 0$$

$$rot\vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

Tomando el gauge de Coulomb

$$\vec{B} = rot\vec{A}$$

$$E = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

donde $\vec{A}(\vec{r},t)$ es el potencial vector, que satisface la ecuación de onda:

$$\nabla^2 \vec{A} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2}$$

Análogamente, el campo magnético y eléctrico satisface la ecuación de ondas:

$$\nabla^2 \vec{B} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} \quad \text{y} \quad \nabla^2 \vec{E} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

lo que pone de manifiesto la naturaleza ondulatoria del campo.

La solución a estas ecuaciones viene dada por una combinación lineal de ondas planas, caracterizadas por el vector de ondas $\vec{k}$ y la frecuencia angular ω.

Para conocer el campo en el interior de una cavidad de volumen V, es necesario aplicar las condiciones de contorno de Born-Von Karmann que selecciona las ondas planas armónicas componentes del campo: *los modos normales.*

Estas condiciones conducen a formas discretas para los posibles valores del vector $\vec{k}$

$$K_x = \frac{2\pi}{L_x} l$$

$$K_y = \frac{2\pi}{L_y} m$$

$$K_z = \frac{2\pi}{L_z} n$$

donde l, m, n son números enteros y L_x, L_y, L_z son las dimensiones de la cavidad $V = L_x L_y L_z$.

Por cada modo hay asociadas dos direcciones independientes de polarización mutuamente perpendiculares a la dirección de propagación de la radiación. Cada modo viene caracterizado por cuatro índices, tres referentes al valor de las componentes de su vector de onda (l, m, n) y el último a su polarización $\varepsilon = \pm 1$.

El campo en el interior queda por tanto definido

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \sum_{l,m,n,\varepsilon} \vec{E}_{l,m,n,\varepsilon}(\vec{0},\vec{0}) \operatorname{Re}\left\{ e^{-i(\omega_{lmn} t - 2\pi)\left(\frac{l}{L_x}x + \frac{m}{L_y}y + \frac{n}{L_z}z\right)} \right\}$$

$$\vec{H}(\vec{r}, t) = \sum_{l,m,n,\varepsilon} \vec{H}_{l,m,n,\varepsilon}(\vec{0},\vec{0}) \operatorname{Re}\left\{ e^{-i(\omega_{lmn} t - 2\pi)\left(\frac{l}{L_x}x + \frac{m}{L_y}y + \frac{n}{L_z}z\right)} \right\}$$

donde $\omega_{lmn} = 2\pi c \left[\left(\frac{l}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{m}{L_y}\right)^2 + \left(\frac{n}{L_z}\right)^2 \right]^{1/2}$

donde ω no depende del estado de polarización ε. La frecuencia es la misma para los vectores de polarización asociados a cada modo. En un espacio tridimensional a cada modo $\{0, K_x, K_y, K_z\}$, se le asocia un punto de ese espacio, constituyendo todos una red tridimensional. Si se toma una capa esférica de grosor comprendida entre K y $K + dK$, el

número de modos normales por unidad de volumen con un número de onda comprendido en esa capa es $\left(\frac{K}{\pi}\right)^2 dK$.

En unidades de frecuencia, $K = \frac{2\pi\nu}{c}$, entonces se tiene que el número de modos por unidad de volumen comprendidos entre ν y $\nu + d\nu$ será:

$$g(\nu)d\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} d\nu$$

Suponiendo que la cavidad es de paredes perfectamente reflectoras y aplicando las condiciones de contorno pertinentes, el potencial vector se puede expresar como combinación lineal de modos normales ortogonales pesados por coeficientes con dependencia temporal.

$\vec{A}(r,t) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0}} \sum_a q_a(t)\vec{u}_a(\vec{r})$, donde a es el conjunto $\{l, m, n, \varepsilon\}$

Sustituyendo la expresión $\vec{A}(r,t)$ en:

$$\nabla^2 \vec{A} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} , \qquad \frac{\nabla^2 u_a}{u_a} = \frac{1}{c^2}\frac{1}{q_a}\frac{d^2 q_a}{dt^2} = -\frac{\omega_a^2}{c^2}$$

Esto conduce a dos ecuaciones diferenciales para los coeficientes y los modos normales.

$$\nabla^2 \vec{u}_a(\vec{r}) + \frac{\omega_a^2}{c^2}\vec{u}_a(\vec{r}) = 0$$

$$\frac{d^2 q_a(t)}{dt^2} + \omega_a^2 q_l(t) = 0$$

Conocidos los modos $\vec{u}_a(\vec{r})$, el campo está unívocamente determinado por los coeficientes y por tanto, dar los coeficientes es equivalente a conocer el campo.

La ecuación diferencial que sigue estos coeficientes es análoga a la de un oscilador armónico cuya frecuencia es la misma que la que gobierna al modo. Por tanto, cada modo del campo puede estar asociado a un oscilador armónico de frecuencia ω_a, y el estudio del campo de radiación se reduce al estudio del comportamiento de esos osciladores virtuales. Esto justifica el hecho de que Planck se centrara en el estudio de los osciladores para resolver el problema.

Esta aseveración queda plenamente justificada al observar que la energía del campo tiene la forma de la energía de este conjunto de osciladores, uno por cada frecuencia dada asociado a un modo.

$$H = \frac{1}{2}\sum_a \left(\dot{q}_a^2 + \omega_a^2 q_a^2\right) \equiv \sum_a H_a$$

Como ya demostrara Planck, para dar la composición espectral de la densidad de energía de la radiación es necesario hacer consideraciones estadísticas imprescindibles para conectar los fenómenos microscópicos con lo observado experimentalmente. Esta hipótesis era equivalente a promediar la energía de cada oscilador.

Tratamiento Termodinámico.

El primero en estudiar el problema de la radiación negra fue Kirchoff (1824-1887), quien enunció durante (1859 -1860) el siguiente teorema:

"Sea ds un elemento diferencial de la pared de una cavidad cualquiera y $a_\lambda(T)$ la fracción de energía incidente de la longitud de onda entre λ y $\lambda + d\lambda$ que es absorbida por la superficie a temperatura T. La tasa con que absorbe energía en ese intervalo será: $\pi a_\lambda k_\lambda ds$, donde k_λ es la intensidad de la radiación. Análogamente radia energía con la forma $\pi e_\lambda ds$ en ese mismo intervalo. Para que se llegue al equilibrio deben igualarse la emisión y absorción totales:

K=$\int_0^\infty k_\lambda d\lambda = \int_0^\infty e_\lambda d\lambda$"

El desconocimiento analítico de k_λ llevó a Kirchoff a demostrar la igualdad para un intervalo infinitesimal de longitud de onda, es decir: $a_\lambda k_\lambda = e_\lambda$. Esta es la ley de radiación de Kirchoff:

$$k_\lambda(T) = \frac{e_\lambda}{a_\lambda}$$

donde la distribución de intensidades sólo depende de la temperatura y de la longitud de onda, pero no de la forma, tamaño, ni material del cuerpo; k_λ= cte en toda la cavidad y por eso es válido paras todos los materiales.

Particularizando a un cuerpo negro $a_\lambda = 1$ y $e_\lambda = k_\lambda$, por lo tanto la radiación emitida por un cuerpo negro es idéntica a su distribución de intensidades en el equilibrio.

Termodinámicamente, se podían explicar también algunas leyes que experimentalmente cumplía la radiación, este estudio se hacía independientemente de los procesos atómicos, considerando únicamente la existencia de un cuerpo negro que emite radiación al margen de la temperatura.

La presión de radiación en equilibrio termodinámico se puede encontrar con ayuda de las ecuaciones del electromagnetismo en una superficie perfectamente reflectora:

$$P = \frac{u}{3}$$

donde u es la densidad de energía.

En un proceso reversible infinitesimal a volumen constante en el que se suministra calor al sistema, el aumento de energía interna es du y el incremento de entropía es $ds = du/T$.

Por otra parte, en un proceso reversible a temperatura constante, en la que se aumenta el volumen en dV, la energía interna total aumentará en udV y el trabajo realizado por el sistema será:

$$dW = -PdV = -\frac{u}{3}dV$$

Mediante el Segundo Principio de la Termodinámica, podemos obtener el calor absorbido por el sistema:

$$dW + \delta Q = udV \Rightarrow \delta Q = udV - dW = \frac{4}{3}udV$$

Según la definición de Clausius de la Entropía:

$$ds = \frac{\delta Q}{T} = \frac{4}{3}\frac{udV}{T}$$

integrando la expresión anterior

$$\int ds = \int \frac{4}{3}\frac{u}{T}dV \Rightarrow s = \frac{4}{3}\frac{u}{T}$$

donde s en la fórmula anterior es la entropía por unidad de volumen.

En nuestro problema la entropía es función de las variables macroscópicas T, u; la diferencial total va a venir dada por:

$$ds = \left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_u dT + \left(\frac{\partial s}{\partial u}\right)_T du = \frac{du}{T}$$

tomando como función de entropía para hallar la diferencial total, a la obtenida anteriormente:

$$s = \frac{4}{3}\frac{u}{T}$$

se llega a la forma diferencial de Stephan- Bolztmann:

$\frac{du}{u} = 4\frac{dT}{T}$, de donde $\boxed{u = \zeta T^4}$

Para llegar a la ley de Stephan-Boltzmann que relaciona la radiancia espectral K (watt/m^2) con la densidad de energía u (J/m^3) no hay más que tener en cuenta que

$$u = \frac{4\pi}{c}K \text{ con } \sigma = \frac{c}{4\pi}\zeta,\ K = \frac{c}{4\pi}\zeta T^4$$

Por métodos termodinámicos también puede llegarse a una característica que ha resultado fundamental en los procesos teóricos y que se observa experimentalmente. El máximo de la distribución espectral de energía es inversamente proporcional a la temperatura de equilibrio a la que se encuentra la cavidad. Esto se traduce en que a medida que aumenta la temperatura, aumenta la frecuencia a la que la densidad de energía es máxima.

Para la demostración supóngase que la cavidad negra se comporta como una cavidad resonante de paredes reflectoras y que se expande adiabáticamente hasta ocupar un volumen $V + dV$. El segundo principio exige que el trabajo realizado por la expansión ha de ser igual a la variación de energía:

$$-PdV = (u + du)(V + dV) - uV$$

y si $P = \frac{u}{3}$ la ecuación se transforma en

$$\frac{4}{3}\frac{dV}{V} + \frac{du}{u} = 0$$

Integrando la anterior expresión, obtenemos que en una expansión adiabática:

$$TV^{1/3} = cte \quad \text{ó} \quad Tr = cte$$

donde r es el radio de la esfera.

Para llegar a la ley de desplazamiento, debemos relacionar la longitud de onda o frecuencia de la onda reflejada con el radio de la cavidad durante la expansión. Por tratarse de una cavidad en movimiento a una cierta velocidad, el efecto Doppler hace que durante el proceso de reflexión

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda 2\cos\theta}{c}\frac{dr}{dt}$$

si la onda experimenta $\frac{c}{2r\cos\theta}$ reflexiones por unidad de tiempo durante el proceso de atenuación la variación temporal de la longitud de onda será

$$\frac{d\lambda}{dt} = \frac{c\Delta\lambda}{2r\cos\theta} = \frac{\lambda}{r}\frac{dr}{dt}$$

que integrando conduce a $d\lambda = \frac{\lambda}{r}dr$, $\frac{\lambda}{r} = cte$.

Relacionando esta expresión con la anterior, llegamos finalmente a la ley de desplazamiento para las longitudes de onda

$$\lambda T = \lambda' T' = cte.$$

Durante la expansión también se verifica que

$$ur^4 = cte$$

que conduce inmediatamente a

$$\frac{u}{T^4} = cte$$

La ley de Stephan sigue siendo válida durante la expansión. Si analizamos la región de energía comprendida entre λ y $\lambda + d\lambda$ la energía por unidad de volumen será

$$\frac{u(\lambda,T)}{T^4}d\lambda = \frac{u(\lambda',T')}{T'^4}d\lambda' = cte$$

$$\lambda T = \lambda' T' \Rightarrow (\lambda + d\lambda)T = (\lambda' + d\lambda')T'$$

$$\frac{d\lambda}{d\lambda'} = \frac{T'}{T}$$

que sustituyendo en la anterior se transforma en

$$\frac{u(\lambda,T)}{T^5} = \frac{u(\lambda',T')}{T'^5} = cte \qquad si \quad \lambda T = cte$$

por lo tanto

$$u(\lambda,T) = f(\lambda T)T^5$$

donde f es una función de argumento constante y uniforme.

La primera tentativa importante de encontrar la forma de $f(\lambda T)$ se debe a Wien que utilizó el hecho de que la longitud de la radiación emitida por una molécula y la intensidad eran funciones únicamente de la velocidad. Usando la ley de Distribución de Velocidades de Maxwell-Bolztmann, concluyó que la energía en el equilibrio entre la radiación y materia, conducía a

$$k_\lambda = g(\lambda)e^{-f(\lambda)/T}.$$

Para que esta expresión fuese consistente con el resultado, $k_\lambda = \frac{c}{4\pi} f(\lambda T)T^5$, eligió la forma más sencilla posible de $f(\lambda)$ y $g(\lambda)$:

$$f(\lambda) = \frac{a}{\lambda}\ ;\ g(\lambda) = \frac{b}{\lambda^5};\ k_\lambda = \frac{b}{\lambda^5} e^{-a/T\lambda}$$

$$u_\lambda = \frac{4\pi}{c} k_\lambda = \frac{4\pi}{c}\frac{b}{\lambda^5} e^{-a/T\lambda}$$

donde mediante ajuste experimental se obtienen las constantes a y b. Esta ley fue verificada por Roschenn y Wanner en la región visible para temperaturas superiores a 4000 grados centígrados. Posteriormente, como veremos, Planck la reformuló en 1899 con argumentos más fiables.

A principio de siglo, Rayleigh y Jeans obtuvieron la ley de distribución que era válida sólo para bajas frecuencias mediante argumentos clásicos. Fue uno de los motivos que hizo que mantuvieran una postura más reticente.

Rayleigh y Jeans fueron los primeros en dar una forma a la Ley de Distribución Espectral de Frecuencias, asumiendo dos hipótesis:

a) La radiación se descompone en modos normales distribuidos respecto a la frecuencia con la misma ley que para una cavidad resonante (debido a las condiciones de contorno de Born-Von Karmman), la energía de la radiación es equivalente a la suma de las energía de los osciladores armónicos independientes asociados a cada modo posible.

b) La interacción materia-radiación excita térmicamente a los osciladores. Para hallar su energía media, se aplica los métodos de la Mecánica Estadística (Teorema de Equipartición).

Mediante estas consideraciones, la obtención de $u(\nu, T)$ se reduce a hallar la densidad de energía a una temperatura dada para una cierta región espectral. En el intervalo de frecuencias ν, $\nu + d\nu$, la densidad de modos por unidad de volumen será

$$g(\nu) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}$$

Si las paredes de la cavidad están a una temperatura T de equilibrio, la energía media (observable), viene dada según el teorema de Equipartición:

$\langle H_{lmn\varepsilon} \rangle = KT$ que como se observa, es independiente de la frecuencia.

Multiplicando el número de modos por unidad de volumen en el rango espectral dicho, por la energía de cada modo, tendremos la densidad de energía espectral, que viene dada por:

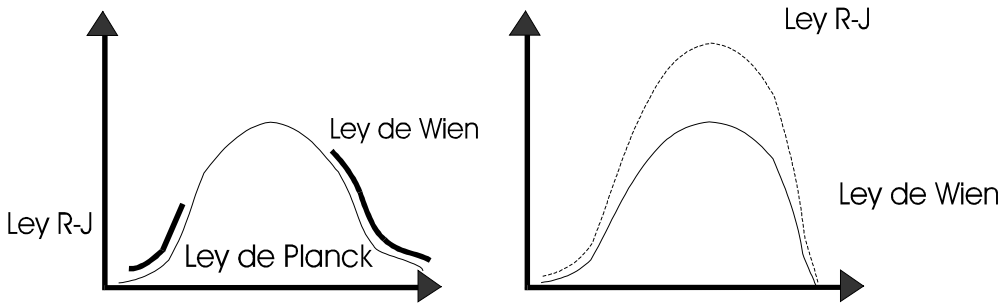
$u(\nu, T) = g(\nu, T)KT = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} KT$, que cumple la ley de desplazamiento.

Esta ley obtenida mediante rigurosos argumentos clásicos conducía a dos resultados equívocos:

1) La suma de la densidad espectral a todas las frecuencias conducía a una energía infinita en contra de la ley de Stephan $K = \sigma T^4$

$$u = \int_{-\infty}^{\infty} u(\nu) d\nu \propto \nu^3 \Big|_0^{\infty}$$

2) Esta ley de distribución divergía visiblemente de los resultados experimentales a altas frecuencias. A este fenómeno se le llamó "Catástrofe Ultravioleta"



Ideas Principales.

- La Termodinámica era capaz de llegar a ciertos resultados generales que caracterizaban la situación de equilibrio y que son independientes, incluso de la naturaleza intrínseca de los fotones.
- El estudio de la radiación en equilibrio es equivalente al estudio de los osciladores en equilibrio, pues caracterizan totalmente el Hamiltoniano del problema, y esto justifica el uso de los osciladores en el estudio de Planck.

3. PLANCK Y LA HISTORIA DE UN FRACASO

A finales de 1894 el físico alemán Max Planck (1858-1947) discípulo de Clausius, con una amplia formación termodinámica de más de 30 años, doctrina a la que condujo su búsqueda del absoluto y universal en la ciencia, abordó el problema de la radiación negra, en un principio, con una única herramienta: Los dos primeros principios de la termodinámica, tal y como fueron anunciados por Clausius.

Su dedicación al problema se explica por dos hechos:

- El carácter universal del espectro de radiación, es decir, la independencia de la forma de la curva de distribución con la naturaleza del cuerpo, implicaba que tras el problema subyacía una cuestión primordial.
- Para resolver la contradicción entre la reversibilidad de las ecuaciones de la Mecánica y de la Electrodinámica clásica, con la irreversibilidad del mundo microscópico

Efectivamente, termodinámicamente se sabía que el equilibrio estable se correspondía con el máximo de la función de entropía. Si se inyecta una distribución inicial arbitraria de energía en la cavidad, la distribución tenderá al equilibrio a medida que se establece un flujo de energía absorbida y emitida. La aproximación al equilibrio térmico es irreversible y durante el proceso la entropía tiende a aumentar, por tanto, si se consigue una fórmula para la entropía de la radiación como variables del campo, la situación de equilibrio corresponde el máximo de la entropía total. Este hecho chocaba frontalmente con la aparente covarianza a inversión temporal de las ecuaciones de

Hamilton, que tantos éxitos había logrado. En este sentido son clarificadoras las objeciones de Zermelo-Lodsmicht.

Para atacar el problema se plantean dos posibilidades: dar por válida la Mecánica y explicar el Segundo Principio, o dotar a la Termodinámica de absoluta validez e intentar reconciliarlo con la Mecánica. Planck se decantó por la segunda posibilidad, ya que rechazaba una explicación mecánica del Segundo Principio porque ello suponía aceptar implícitamente que la irreversibilidad cobraba un enfoque estadístico y una discretización de la materia.

También Zermelo rechazaba una explicación mecánica del Segundo Principio, porque según demostró Poincaré, cualquier sistema mecánico evoluciona temporalmente a una configuración próxima de la que partió. Con esta visión, son imposibles los procesos irreversibles porque ninguna función continua (como la entropía) puede aumentar continuamente y volver al estado inicial; tiene que haber un decrecimiento en algún momento.

Sus resultados los comunicó en cinco artículos, publicado el primero de ellos en 1897. En su estudio preliminar del cuerpo negro se dedicó a la explicación de la unidireccionalidad de un proceso conservativo como era la influencia de un oscilador sin rozamiento sobre una onda que lo excita. La energía radiada no es de la misma clase que la absorbida, es decir, las vibraciones del oscilador, altera el carácter de las ondas propagadas y tiene una tendencia equilibradora. Sin embargo, su derivación tenía un defecto fundamental: Las Ecuaciones de Maxwell no podían producir una aproximación al equilibrio de tal forma que el problema de la irreversibilidad se demostró insoluble si no se hacían ciertas concesiones estadísticas, tal y como había hecho Bolztmann en la teoría de los Gases Cinéticos (1898).

El primer modelo que se plantea Planck para estudiar la radiación del cuerpo negro es una esfera conductora en cuyo interior se disponía uno o más resonadores interaccionando con un campo; y estudiando un sólo resonador es capaz de demostrar la reversibilidad pero bajo unas condiciones iniciales un tanto forzadas. Un término de amortiguamiento conducía a la irreversibilidad.

Esta manera de tomar las condiciones iniciales es objeto de crítica por parte de Bolztmann, puesto que éste le hace ver que la irreversibilidad es producto de una elección apropiada de las condiciones iniciales. Planck, percantándose de la problemática de las condiciones iniciales, acepta la hipótesis de la radiación natural, que viene a ser una visión electromagnética del desorden molecular de Bolztmann.

Realizando un estudio análogo al de Bolztmann, llega a una relación entre la energía del resonador y la densidad:

$$\frac{dU_0}{dt} + 2\nu_0 \zeta U_0 = \frac{c^3 \zeta}{4\pi\nu_0} u_0$$

$$U_0 \equiv \textit{energía del resonador}$$

$$u_0 \equiv \textit{densidad de energía de campo}$$

La condición de equilibrio $dU_0 / dt = 0$ entre la radiación y energía del campo a la frecuencia ν se convierte en:

$$u_0 = \frac{8\pi\nu_0^2}{c^3} U_0$$

Continuando con su programa de investigación, Planck da una prueba de la irreversibilidad, extrae una función de entropía electromagnética y deriva de ella la distribución de equilibrio.

Para la demostración del primer objetivo, elige una función más sencilla determinada por el estado instantáneo del sistema y que posee la característica de variar en una sola dirección de forma creciente. A esta función la llama entropía en analogía con la termodinámica de Clausius. Esta función de entropía la dedujo haciendo un proceso inverso a partir de la ley de distribución de Wien. Sabía que la densidad de energía del campo estaba relacionada con el oscilador mediante la fórmula:

$$(1)\ u_\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} U_\nu \text{ donde } U_\nu = \text{energía del resonador}$$

$$u_\nu = \text{densidad de energía del campo}$$

Sabía también que la ley de desplazamiento conducía a una forma específica para la densidad de energía del campo y la entropía.

$$\lambda_{\max}T = b;\ u_\lambda = T^5 f(\lambda T);\ \nu^2/c\ u_\nu = \frac{b^5\nu^5}{c^5} f(\frac{cT}{\nu}) \Rightarrow u_\nu = \frac{b^5}{c^4}\nu^3 f\left(c\left(\nu/T\right)^{-1}\right)$$

$$u_\nu = k\nu^3 f\left(c\left(\nu/T\right)^{-1}\right) \Rightarrow u_\nu = \nu^3\xi\left(\nu/T\right);$$ correción de lo anterior

U = $\int_{-\infty}^{0} u_\lambda d\lambda = \int_{0}^{\infty} u_\nu d\nu$ para ver la relación entre ambas

$$\nu = \frac{c}{\lambda}; d\nu = -\frac{c}{\lambda^2}d\lambda \Rightarrow U = -\int_0^\infty u_\nu \frac{c}{\lambda^2}d\lambda = \int_\infty^0 u_\nu \frac{c}{\lambda^2}d\lambda = \frac{1}{c}\int_\infty^0 \nu^2 u_\nu d\lambda$$

luego $u_\lambda = \frac{\nu^2}{c}u_\nu$, de donde $\nu^3\xi\left(\nu/T\right) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}U \Rightarrow U = \nu\varphi\left(\nu/T\right)$

$\frac{U}{\nu} = \varphi\left(\nu/T\right) \Rightarrow f\left(\frac{U}{\nu}\right) = \nu/T$ y por tanto $\frac{1}{T} = \frac{1}{\nu}f\left(\frac{U}{\nu}\right); f\left(\frac{U}{\nu}\right) = \nu\frac{\partial S}{\partial U} = \frac{\partial S}{\partial\left(\frac{U}{\nu}\right)}$

$$S = \int f\left(\frac{U}{\nu}\right)d\left(\frac{U}{\nu}\right) \Rightarrow S = \phi\left(\frac{U}{\nu}\right)$$

donde f es una función unívoca de su argumento para la que Wien había propuesto una forma particular:

$$f\left(\nu/T\right) = be^{-a\nu/T}$$

identificando u_ν (de Wien) con la expresión (1) extrajo la U_ν y a partir de la definición termodinámica:

$$\frac{\partial s}{\partial U} = \frac{1}{T} = -\frac{1}{a\nu}\ln\left[\frac{8\pi U_\nu}{c^3 b\nu}\right]$$

extrajo la forma para la entropía como

$$s(U) = -\left(\frac{U_\nu}{a\nu}\right)\left[\ln\left(\frac{8\pi U_\nu}{c^3 b\nu}\right) - 1\right] + cte$$

Planck fue capaz de expresar la derivada temporal de la entropía total como el cuadrado de una magnitud real que es por tanto positiva o nula quedando así probada la irreversibilidad. Realizando el mismo estudio para un caso más general de una cavidad no esférica constituida por un conjunto infinito de resonadores llega a las mismas conclusiones, pero añade a su estudio que esta magnitud es máxima en el equilibrio y que la entropía total tiene que ser constante, cuando el sistema experimenta un desplazamiento virtual fuera del equilibrio.

Asumimos que una pequeña cantidad de energía pasa del oscilador de frecuencia ν, entropía S y energía U, a otro de frecuencia ν', entropía S' y energía U'. El principio de entropía requiere que la variación de entropía total $\delta S_t = \delta S + \delta S' = 0$ y el principio de conservación de la energía requiere que $\delta U + \delta U' = 0$.

Si tomamos la definición de entropía:

$$S = \frac{U}{a\nu}\log\left(\frac{U}{eb\nu}\right), \text{ donde } e = \text{base de los logaritmos naturales}$$

$$\delta S = \frac{\delta U}{a\nu}\log\left(\frac{U}{eb\nu}\right) + \frac{U}{a\nu}\left[\frac{\delta U}{U}\right] = \frac{\delta U}{a\nu}\left(\log\left(\frac{U}{b\nu}\right) - 1\right) + \frac{\delta U}{a\nu}$$

$$\delta S' = \frac{\delta U'}{a\nu'}\left(\log\left(\frac{U'}{b\nu'}\right) - 1\right) + \frac{\delta U'}{a\nu'}$$

$\delta S + \delta S' = 0$ se sigue:

$$\frac{\delta U}{a\nu}\left(\log\left(\frac{U}{b\nu}\right) - 1\right) + \frac{\delta U}{a\nu} = \frac{\delta U'}{a\nu'}\left(\log\left(\frac{U'}{b\nu'}\right) - 1\right) + \frac{\delta U'}{a\nu'}$$

si $\delta U' = \delta U$, llegamos finalmente a:

$$-\frac{1}{a\nu}\log\left(\frac{U}{b\nu}\right) = -\frac{1}{a\nu'}\log\left(\frac{U'}{b\nu'}\right)$$

La expresión en el lado izquierdo es una constante para todos los osciladores e igualándolo a 1/T se obtiene

$U = b\nu e^{-a\nu/\theta}$ y con la ayuda de la relacion: $u_\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}U_\nu$, se llega a la ley de Wien: $u_\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}b\nu e^{-a\nu/\theta}$

La identificación de esta densidad de energía con la ley de Wien se llega mediante dos pasos previos:

1. Reescribir la ecuación como una función de distribución de intensidades.
2. Identificar la constante θ con la temperatura termodinámica.

$$k_\lambda = \frac{2c^2 b}{\lambda^5} e^{-ac/\lambda\theta}$$

El problema que se planteaba para realizar los pasos mencionados consistía en identificar la función S_t definida como la entropía termodinámica de la radiación. Una vez conocida ésta, podía aplicarse la conocida ecuación termodinámica:

$$\frac{\partial S}{\partial U} = \frac{1}{T}$$

y llegar a la conclusión de que θ=T.

La clave de la cuestión descansaba en asegurar que esta función entropía era la única que podía ser identificada como la entropía termodinámica, de entre todos los que cumplían el requisito de irreversibilidad. En semejantes circunstancias, se cerciora que la función S_t está unívocamente determinada por las condiciones del problema y llama a θ la única definición electromagnética posible de la temperatura y atribuye esta temperatura a la cavidad que contiene la radiación. Su confianza de que esta S_t era la verdadera, estaba basado en tres hechos:

1. El intento de obtener una expresión para S partiendo de una ley alternativa a la de Wien, violaba el teorema de aumento de entropía.
2. El paralelismo entre la expresión $(\frac{U_\nu}{\nu}\log\frac{U_\nu}{\nu})$ y $f\log f$ de Bolztmann y
3. Las constantes a y b de la ley de Wien eran constantes naturales y absolutas independientes del tiempo o de convenciones iniciales.

Debido a las relaciones dimensionales entre *a, b, θ, c* se permite definir un conjunto de unidades de masa, espacio, tiempo y temperatura de carácter absoluto, resultado este último que encontró una gran satisfacción por parte de Planck, que concebía lo absoluto en la Ciencia, como lo más importante y primordial.

Los experimentos de Lummer y Prinsgheim en la región del infrarrojo no tardaron en demostrar la invalidez de la ley de Wien para describir la radiación en ese espectro. Esto motivó el replanteamiento de la unicidad de la función *S(U)*. Lummer y Prinsgheim en su intento de mantener la forma de la ley de Wien advirtieron una dependencia clara de las dos constantes de esa ley respecto a la T y a la longitud de ondas.

En una primera aproximación del problema, Planck se ocupa de las características que debe poseer *S(U)* para que tenga máximos locales. Para ello, imagina un sistema inicialmente en equilibrio que se aparta de él mediante una energía adicional Δu que se añade a uno de los resonadores. La transición al equilibrio está gobernada por una ecuación que difiere de la anterior ecuación fundamental:

$$\frac{dU}{dt} + 2\zeta\nu\Delta U = 0$$

Tras sucesivas transformaciones realizadas con anterioridad, se tiene una ecuación para el cambio de entropía:

$$dS_t = dU\Delta U \frac{3}{5}\left(\frac{\partial^2 S}{\partial U^2}\right)_0$$

Esta fórmula relaciona la variación de entropía con respecto a la energía de un oscilador.

Para que $dS_t > 0$ y la posición de equilibrio sea un máximo local, $\frac{3}{5}\frac{\partial^2 S}{\partial U^2} = -f(U)$ donde $f(U)$ es cualquier función positiva de U, ya que dU y ΔU son de signos contrarios.

Lo siguiente es desplazar el n resonador de su posición de equilibrio ΔU de tal forma que el desplazamiento total de la energía sea $\Delta U' = n\Delta U$. Por otro lado, la aditividad de la entropía aseguraba también que $dS_{t'} = ndS_t$. Suponiendo que la entropía total de los osciladores S' depende de la energía total U' en la misma forma que para un sólo resonador, se llegaba a la conclusión de que

$$f(nU) = \frac{1}{n} f(U).$$

Que solamente se satisface claramente cuando f(U) es inversamente proporcional a U. Con lo cual la ecuación anterior adopta la forma:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial U^2} = -\frac{\alpha}{U}.$$

de la que se deriva la entropía que Planck definiera para un sólo oscilador y la ley de distribución de Wien, que reafirmaba su infundada convicción anterior.

Sin embargo, nuevos experimentos ampliados entre 12 y 18μ (micras) conducían a unas discrepancias entre experimento y teoría del orden del 50% que no podían ser fruto de errores experimentales que hacían insostenible la ley de Wien-Planck.

Planck no tardó en percatarse del error de su derivación anterior. La entropía de n osciladores tiene que depender no sólo de la energía total U', sino también de la energía de un solo oscilador. Planck conocía que la ley de Rayleigh-Jeans daba cuenta correctamente de los resultados experimentales a bajas frecuencias y que era proporcional a T. También sabía que la ley de Wien reproducía los resultados

experimentales a altas frecuencias. Para obtener una ley de distribución que diese cuenta de ambas regiones, realizó un proceso de interpolación que describimos a continuación.

Si u_ν es proporcional a T a bajas frecuencias, la dependencia lineal en T está en U pues $u_\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} U_\nu$.

Como $U_\nu = K_B T$, $\frac{1}{T} = \frac{K_B}{U_\nu}$, si $\frac{\partial S}{\partial U} = \frac{1}{T}$ se obtiene que $\frac{\partial^2 S}{\partial U^2} = \frac{const}{U^2}$. Por otra parte la ley de Wien conducía a

$U_\nu = b\nu e^{-a\nu/T}$

$\frac{U}{b\nu} = e^{-a\nu/T}$; $\ln\frac{U}{b\nu} = -\frac{a\nu}{T}$; luego $\frac{1}{T} = -\frac{1}{a\nu}\ln\frac{U}{b\nu} = \frac{\partial S}{\partial U}$

de ahí se sigue que $\frac{\partial^2 S}{\partial U^2} = -\frac{1}{a\nu}\frac{1}{\frac{U}{b\nu}}\frac{1}{b\nu} = -\frac{1}{a\nu}\frac{1}{U} = \frac{\text{cte}}{U}$

y realizando el proceso de interpolación, Planck llega a $\frac{\partial^2 S}{\partial U^2} = \frac{cte}{U(U+b)}$

que conduce a la ley de Rayleigh para altas energías y a la de Wien para pequeñas energías. Tomando

$$\frac{1}{T} = \frac{\partial S}{\partial U} = a' \log\left(\frac{U+b}{U}\right) \text{ con } U = \frac{b}{e^{1/a'T} - 1},$$

a' y b son funciones inversas de ν

con esta energía para cada oscilador, la curva de distribución espectral, quedaba como sigue

$$u_\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}\frac{b\nu}{e^{a\nu/T} - 1}.$$

Para dar una justificación teórica y una interpretación física a la nueva ley de distribución, Planck tuvo que abandonar el ataque termodinámico del problema y reconciliarse con los métodos probabilísticos de Bolztmann para garantizar la deducción que le había conducido a un resultado correcto.

No hay que olvidar que la anterior expresión no es más que una extensión que conduce a la expresión de Wien para valores pequeños de U y que no tiene base teórica.

Una de las críticas apuntadas por Lummer referente a la ecuación de obtención de:

$$dU_n.\Delta U_n f(U_n) = ndU\Delta Uf(U)$$

Señalaba el problema fundamental de cómo se repartía el aumento de entropía total entre los *n* resonadores, es decir, si uno podía suponer que el aumento de entropía para cualquier número *n* de osciladores es realmente el mismo que para un sólo oscilador desplazado del equilibrio en una cantidad igual a la suma de los desplazamientos de los *n* osciladores individuales. Efectivamente, la derivación inicial de Planck contenía una contradicción interna: se exigía que los *n* osciladores fuesen independientes, pero el argumento descansaba en el supuesto de que su energía total U_n estaba distribuida por igual entre los *n* osciladores. El verdadero enfoque del problema, consistía en considerar las diferentes formas en que la energía total se repartía entre los diferentes osciladores, en la misma línea en que Bolztmann, en sus argumentos combinatorios, había dividido la energía total de un gas entre las moléculas componentes, para lo cual Planck contaba con el legado de Bolztmann.

De la expresión U_ν y mediante transformaciones termodinámicas se llega a la expresión logarítmica entrópica:

$$U = \frac{b\nu}{e^{a\nu/T} - 1}$$

$$\frac{U}{b\nu} = \frac{1}{e^{a\nu/T} - 1};\ \ln\left(\frac{b\nu}{U} + 1\right) = \frac{a\nu}{T};\quad \frac{1}{a\nu}\ln\left(1 + \frac{b\nu}{U}\right) = \frac{\partial S}{\partial U}$$

$$S = \frac{1}{a\nu}\int \ln\left(1 + \frac{b\nu}{U}\right)dU;\ \text{haciendo:}$$

$$x = \frac{U}{b\nu};\ dx = \frac{1}{b\nu}dU;\ \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \ln\frac{x+1}{x}\ \text{nos queda}$$

$$S = \frac{b}{a}\int[\ln(x+1) - \ln x]dx = \frac{b}{a}\left[(x+1)\ln(x+1) - \ln e - \ln x^x\right] =$$

$$S = \frac{b}{a}\ln\left[\frac{(x+1)^{x+1}}{x^x}\right] + \text{cte},\ \text{de donde}\ S = \frac{b}{a}\log\left[\frac{\left(1 + \frac{U}{b\nu}\right)^{1+\frac{U}{b\nu}}}{\left(\frac{U}{b\nu}\right)^{U/b\nu}}\right] + \text{cte}$$

Esta última expresión se aplica a un único oscilador de energía media U, en equilibrio con un campo de radiación y no se presta, por tanto, a una interpretación probabilística.

El camino que siguió Planck, fue imaginar n osciladores independientes de frecuencia ν en equilibrio con el campo de radiación; la entropía total tiene que ser igual a n veces la entropía para uno sólo y la energía total debe ser nU, puesto que todos ellos tienen la misma energía media a lo largo del tiempo. Para introducir la combinatoria, es preciso subdividir esa energía total en P elementos de tamaño ε de forma que $P\varepsilon = NU$. Multiplicando la anterior expresión por N y sustituyendo $U = P\varepsilon/N$, llegamos a:

$$S_N = \frac{b}{a}\log\left[\frac{\left(N+\frac{P\varepsilon}{b\nu}\right)^{N+\left(P\varepsilon/b\nu\right)}}{N^N\left(\frac{P\varepsilon}{b\nu}\right)^{P\varepsilon/b\nu}}\right] + cte$$

Si era posible deducir la probabilidad correspondiente, debía de ser proporcional a la expresión entre corchetes y para ello habría que discretizar el tamaño de elemento de energía $\varepsilon = b\nu$ para que apareciera un número entero. Esto se reduce a la forma de distribuir P elementos de tamaño ε entre los N osciladores.

$$R = \frac{(N+P-1)!}{(N-1)!\,P!}$$

La fórmula anterior representa el número de posibles formas de distribuir P elementos indistinguibles entre los N resonadores mediante los siguientes argumentos:

Supongamos que tenemos los P elementos de tamaño $\varepsilon = b\nu$ a distribuir entre N estados o resonadores de la misma frecuencia ν:

p

o / o o / o o ..... o

Los estados que reciben esos elementos de energía los distinguimos por rayas que separan los elementos de cada estado. Si hay N estados los representaremos por $N-1$ rayas entre los P elementos, resultando de cada elección, una posible distribución de la energía. Las Permutaciones de $N-1+P$ elementos son $(N-1+P)!$, pero como el

intercambio de rayas o elementos entre sí conduce a la misma distribución, dividimos por $(N-1)!P!$ permutaciones que conducen al mismo resultado:

$$R = \frac{(N+P-1)!}{(N-1)!P!}$$

Hasta ahora, Planck había hecho un estudio retrospectivo partiendo de la energía media del oscilador en función de la frecuencia y temperatura que era la forma más simple que satisfacía los experimentos.

$$U = \frac{b\nu}{e^{a\nu/T} - 1}$$

La meta que se planteaba Planck consistía en abordar el problema de forma inversa, asumiendo la relación de Bolztmann para la entropía y la probabilidad, considera una envoltura reflectora que contiene N osciladores de frecuencia ν, N' de frecuencia ν', N'' de frecuencia ν'', etc. La energía total E_t está distribuida de tal forma que los N osciladores tienen una energía E, el conjunto N' una energía E', etc. El problema consiste en resolver la entropía de esta distribución concreta que divide la energía total E_t entre las de $N+N'+N''$... de estos osciladores y hallar su máximo con respecto a la variación de la distribución de la energía total. Para ello sigue los pasos de Bolztmann al subdividir el continuo de energías en elementos de tamaño finito e introducir una hipótesis de importancia fundamental; los elementos de energía ε, ε', ε'', son proporcionales a la frecuencia. A continuación define el término "complexión".

<u>Complexión</u>: Planck aclaró el término de complexión con el siguiente ejemplo. Si tenemos 100 elementos de tamaño ε fijo a distribuir entre 10 resonadores, una posible complexión sería asignar al primero 38, al segundo 7, al tercero nada y así hasta diez.

$$\sum_{N=1}^{10} P_N \varepsilon = 100\varepsilon$$

Desde una visión actual y global se puede observar la importancia del cuerpo negro en los orígenes de la Mecánica Cuántica, puesto que en la definición de complexión dada por Planck desemboca finalmente en el concepto de los números inversos de ocupación.

A partir de esto, el resto del problema es directo: Repetir el proceso para N' osciladores de energías E' y ν' de frecuencia, N'' para E'' y ν'',... Multiplicando estos resultados se llegaría a R, número de complexiones compatibles con la distribución de energía.

La distribución de equilibrio se obtiene sin más que maximizando R ó $\log R$ teniendo en cuenta la restricción sobre la energía total. Una vez hallada R (distribución en el equilibrio), tomamos la forma natural de la entropía $S = k \log R$, siendo k una cte. La temperatura se obtiene sin más que haciendo uso de la relación termodinámica:

$$\frac{\partial S}{\partial U} = \frac{1}{T}$$

Sin embargo, el procedimiento de Planck cuando expuso el problema, consistía en utilizar otro punto de vista en el que la forma de la discretización de la energía surgiera de forma natural de su derivación, en la que desempeñaba un papel importante la ley de desplazamiento de Wien, que se utilizaba no como consecuencia, sino como una condición previa que estaba ampliamente contrastada por la experiencia.

Supone que está trabajando con osciladores ya en el equilibrio con el campo de radiación. Para el recuento de estados utiliza las mismas técnicas combinatorias, anteriormente descritas. La ventaja de este enfoque del problema consistía en que al suponer el equilibrio, esto no da lugar a maximizaciones y la información necesaria para la especificación exacta de la forma de la entropía, la extraía de la ley de desplazamiento.

$$R = \frac{(N+P-1)!}{(N-1)!\,P!}\ ;\ S = k \ln R;\ S = k \ln \frac{(N+P-1)!}{(N-1)!\,P!}$$

$$\ln \frac{(N+P-1)!}{(N-1)!\,P!} = \ln(N+P-1)! - \ln(N-1)! - \ln P!$$

utilizando la fórmula de Stirling $\ln(N-1)! = (N-1)\ln(N-1) - (N-1)$

$\ln\ P! = P \ln P - P$; $\ln(N+P-1)! = (N+P-1)\ln(N+P-1) - (N+P-1)$, donde al ser $N >> 1$ y $P >> 1$ se tiene que; $(N+P)\ln(N+P) - N \ln N - P \ln P$

Teniendo en cuenta que:

$$\left(N+\frac{NU}{\varepsilon}\right)\ln\left(N+\frac{NU}{\varepsilon}\right)-N\ln N-\frac{NU}{\varepsilon}\ln\frac{NU}{\varepsilon}= \quad \text{(siendo } P=\frac{NU}{\varepsilon}\text{)}$$

$$=N\left[\left(1+\frac{U}{\varepsilon}\right)\left(\ln N+\ln\left(1+\frac{U}{\varepsilon}\right)\right)-\ln N-\frac{U}{\varepsilon}\ln\frac{NU}{\varepsilon}\right]=$$

$$=N\left(\frac{U}{\varepsilon}\ln N+\frac{U}{\varepsilon}\ln\left(1+\frac{U}{\varepsilon}\right)+\ln\left(1+\frac{U}{\varepsilon}\right)-\frac{U}{\varepsilon}\ln N-\frac{U}{\varepsilon}\ln\frac{U}{\varepsilon}\right)=$$

$$=N\left(\ln\left(1+\frac{U}{\varepsilon}\right)\left(1+\frac{U}{\varepsilon}\right)-\frac{U}{\varepsilon}\ln\frac{U}{\varepsilon}\right) \text{ que nos da finalmente:}$$

$$\mathrm{S}=kN\left[\left(1+\frac{U_\nu}{\varepsilon_\nu}\right)\log\left(1+\frac{U_\nu}{\varepsilon_\nu}\right)-\frac{U_\nu}{\varepsilon_\nu}\log\frac{U_\nu}{\varepsilon_\nu}\right]$$

Como la ley de desplazamiento exigía que la entropía fuese una función de tipo $S=\Phi\left(U/\nu\right)$, ε_ν tenía que ser proporcional a la frecuencia $\varepsilon=h\nu$, y dividiendo por N se tendría la entropía de un sólo oscilador:

$$S=k\left\{\left(1+\frac{U}{h\nu}\right)\log\left(1+\frac{U}{h\nu}\right)-\frac{U}{h\nu}\log\frac{U}{h\nu}\right\}$$

aplicando la relación termodinámica $\frac{\partial S}{\partial U}=\frac{1}{T}$, se obtiene la ley de distribución de Planck para la densidad de energía radiante en el interior del cuerpo negro:

$$\boxed{u_\nu=\frac{8\pi h\nu^3}{c^3}\frac{1}{e^{h\nu/kT}-1}}$$

Las dimensiones de h aseguran la adimensionalidad de la exponencial para que la ley de distribución de Planck coincidiese con la de Wien, en el límite de altas frecuencias, si h era próximo a "b" y h/k a "a". De esta forma podrían deducirse las dimensiones de k.

Sin embargo la constante h esencialmente nueva en su derivación, estaba todavía inexplorada. En una carta escrita a Ehrenfest en 1905, sugería que su constante tenía las mismas dimensiones y orden de magnitud que e^2/c.

El valor de Planck para la constante de Avogadro era un valor muy exacto y se aproximaba al valor real más que las estimaciones de la época, basadas en la teoría cinética de los gases. Su valor para la carga electrónica era $e^\nu=4{,}69\cdot10^{-10}\,e.s.u.$ y las medidas realizadas por Rutherford conducían a un valor de $4{,}65\cdot10^{-10}\,e.s.u.$

Lamentablemente, los contemporáneos de Planck no aceptaban este valor y no se incluyo en los libros de tablas. Con esta interpretación, Planck había logrado un nexo cuantitativo y concreto entre la teoría electromagnética y las propiedades de los electrones y átomos, cuestión muy en boga a principios de siglo, por los intentos tópicos de introducir la discretización de la carga electrónica en las ecuaciones de Maxwell, que eran aceptadas casi universalmente y que llevaron a la tristemente famosa hipótesis del éter.

Ideas Principales.

- Planck abordó el problema del cuerpo negro para intentar resolver la aparente contradicción entre la Mecánica y el Segundo Principio de la Termodinámica, pero partiendo para su estudio de un enfoque termodinámico que englobase a la Mecánica de Hamilton y a la Mecánica Estadística de Bolztmann.
- Para demostrar la tendencia irreversible al equilibrio, la variación temporal de la entropía debía ser siempre positiva pero no tenía argumentos para escoger a la que conducía a la ley correcta de entre todas las posibles que cumplían el requisito de irreversibilidad.
- Sólo mediante la Mecánica Estadística se podía elegir la función entrópica correcta, que coincidía con la que Planck obtenía realizando un proceso de interpolación de las leyes clásicas.
- La cuestión importante estaba en ver que cuando los N osciladores en equilibrio, se apartan de él mediante una energía adicional $N\Delta U$, la energía no se reparte por igual entre los N resonadores, sino que, de entre todas las posibles formas, la más probable coincide con la que conduce a la ley correcta.
- Desde una visión actual, hacemos notar la trascendencia del concepto de complexión que hoy en día se conoce con el nombre de números de ocupación.

4. EL IMPACTO DEL CUANTO DE ACCIÓN.

La ley de Planck tal y como fue anunciada tenía una inconsistencia que fue apuntada por Einstein: Si la energía de los osciladores podía variar solamente a saltos, no se podía utilizar la electrodinámica clásica para relacionar la energía media de los osciladores con la energía de la radiación, a menos que el tamaño del salto ε fuera muy pequeño comparado con los valores observados de U. Sin embargo un cálculo sencillo demuestra que para valores de $\nu = 6 \cdot 10^{14}$ y $T = 1700\text{K}$ se obtenía $\varepsilon / U \approx 10^{7}$

Peter Debye intentó resolver esta inconsistencia y llegó a la misma ley utilizando el concepto de cuantización de la energía, sin utilizar los resonadores.

Einstein, mediante argumentos estadísticos fue capaz de interpretar que el comportamiento de la radiación daba a entender que la misma estaba compuesta de un número finito de cuantos de energía, idea que no encontró una unánime aceptación hasta los contundentes resultados de Millikan del efecto fotoeléctrico.

Resulta significativo notar que la ley de radiación de Planck contiene implícitamente la naturaleza dual de la luz tal y como demostró Einstein.

Para ello calculó las fluctuaciones de la energía radiante contenida en un volumen parcial de la cavidad. Si E es la energía en el intervalo de frecuencia ν y ν+dν, por la mecánica estadística, sabemos que la energía media viene dada por:

$$\overline{E} = \frac{\int E e^{-E/kT} dpdq}{\int e^{-E/kT} dpdq}.$$

Si $\tau = E - \overline{E}$ es la fluctuación de energía, la fluctuación cuadrática media vendrá dada por:

$$\tau^2 = E^2 - \left(\overline{E}\right)^2 \text{ lo cual es igual a } kT^2 \frac{d\overline{E}}{dt}$$

$$\tau^2 = E^2 - \left(\overline{E}\right)^2 = kT^2 \frac{d\overline{E}}{dt}$$

Si $\overline{E} = Vu_\nu d\nu$ y u_ν viene dado por la ley de Planck, finalmente se obtiene:

$$\overline{E}^2 = kT^2 V d\nu \frac{du_\nu}{dT} = \frac{8\pi h^2 \nu^4 V d\nu e^{h\nu/kT}}{c^3 (e^{h\nu/kT} - 1)^2}$$

y poniendo la temperatura en función de la energía media, se obtiene:

$$\overline{E}^2 = \overline{E}h\nu + \frac{c^2\overline{E}^2}{8\pi\nu^2 V d\nu}$$

El segundo término tiene su origen en la energía cuadrática media debido a la interferencia de las ondas parciales de radiación, es decir, tiene su base en la teoría ondulatoria maxwelliana de la luz. El primer término no puede ser interpretado desde esta perspectiva siendo necesario recurrir a la hipótesis de los cuantos de luz donde efectivamente se demuestra que si $\varepsilon = nh\nu$ entonces $\overline{\varepsilon}^2 = h\nu\overline{E}$.

Si nos remontamos a los orígenes de la ley de Planck cuando fue deducida por medio de una interpolación, encontramos oculto el germen de la primera interpretación dualista de la radiación.

Si la radiación era descrita a través de la Ley de Rayleigh-Jeans, caracterizada por

$$\frac{\partial^2 S}{\partial U^2} = \frac{cte}{U^2},$$

calculando la desviación cuadrática media de la energía, llegamos al segundo término de la suma, precisamente el asociado a la visión ondulatoria de la radiación. Si por el contrario se utiliza la ley de Wien caracterizada por

$$\frac{\partial^2 S}{\partial U^2} = \frac{cte}{U}.$$

El mismo cálculo corresponde a la visión corpuscular de la luz. Por consiguiente la feliz fórmula de interpolación de Planck

$$\frac{\partial^2 S}{\partial U^2} = \frac{\alpha}{U(U+b)}$$

contiene una amalgama de los dos aspectos de la radiación.

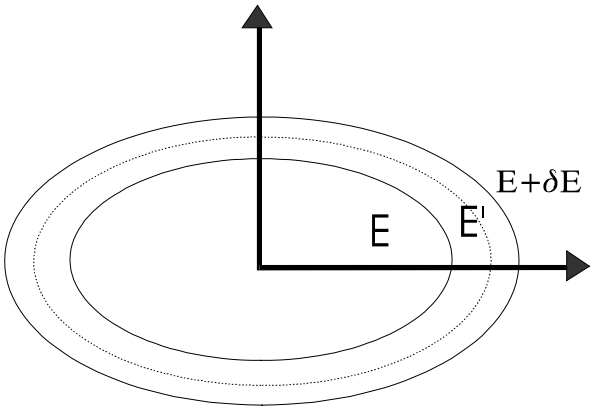
En la técnica mecánico-estadística utilizada por Planck en la derivación de su ley, la entropía podía ser encontrada con las relaciones de Bolztmann y todo el procedimiento estaba completamente determinado, salvo por la elección del tamaño de las celdas en el espacio de igual probabilidad en el tamaño en el espacio de las fases.

Cuando se tiene un oscilador con una energía indeterminada entre E y $E + \delta E$, el número de microestados compatibles con una posible energía E' fija, comprendida en

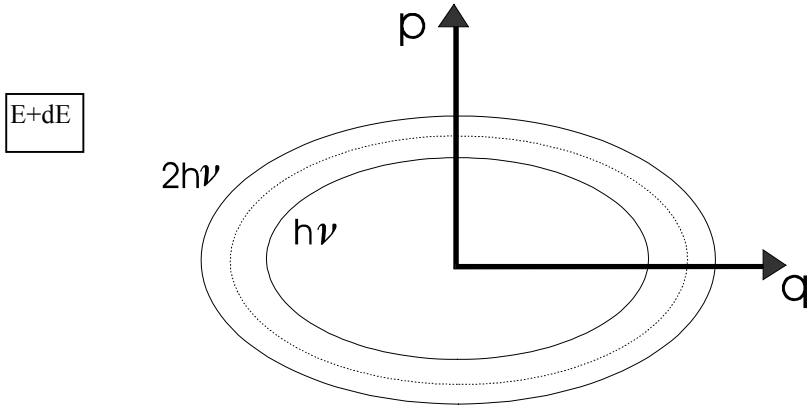
este rango de acuerdo con el Hamiltoniano del sistema, son los que se encuentran sobre la elipse en el espacio de las fases

$$\frac{q^2}{c^2}+\frac{p^2}{d^2}=1;\ c=\sqrt{2mE}\,;\ d=\sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}};$$

$$\text{Área} = A = nh = \pi cd$$



La condición de Planck, equivale a suponer que de entre todas las elipses de energía E', no todas son posibles, sólo algunas, de energía $E' = nh\nu$; $A_{n+1} - A_n = h$



Las coronas de elipse tienen un área constante h y por consiguiente, los microestados compatibles con una determinada energía serán aquellos que están sobre la elipse correspondiente a esa energía, más los que están en las regiones intermedias a los que se les asigna la menor energía. Esto ofrecía una nueva interpretación del cuanto de acción: h es precisamente la talla de las celdas equiprobables en el espacio de fases.

El estudio de las capacidades caloríficas a bajas temperaturas por parte de Einstein, utilizando la hipótesis de la cuantización de la energía, llevaba a que el calor específico, en contra de la ley de Dulong-Petit ($C_V = \frac{3}{2}Nk$) dependía de la temperatura, siendo además capaz de reproducir los resultados experimentales. Nerst, que había

comprobado la dependencia de C_V con la temperatura y su comportamiento anómalo a bajas temperaturas, se interesó por el problema y su estudio condujo finalmente al Tercer Principio de la Termodinámica, quedando finalmente fijada la constante aditiva de la entropía.

Ideas Principales.

La realidad de la naturaleza del cuanto de acción era palpable en dos hechos:

- Peter Debye demostró que el papel de la cuantización de la energía subyacía al concepto de oscilador, es decir, se trataba de algo más general.
- Si los fotones hubieran sido fermiones, Planck se habría convencido de la naturaleza real del cuanto, puesto que la solución del problema, restringía la aplicación del método de Bolztmann: de entre todas las complexiones posibles, sólo eran posible aquellas que asignarían como máximo un cuanto a cada modo, como veremos.
- Einstein fue el primero en proponer el concepto de corpúsculos de luz.

5. ACOGIDA DE LA TEORÍA.

A partir de la publicación de las lecciones de Planck, se originó una controversia entre los físicos de la época que se decantaban entre dos posturas claramente enfrentadas.

La ley de Planck era capaz de reproducir con bastante grado de exactitud los resultados experimentales en toda la región del espectro, pero su resultado de la cuantización no tenía lugar en la Física clásica. Por otra parte, la ley de Rayleigh-Jeans, producto de una derivación clásica que era unánimemente aceptada, sólo era capaz de dar cuenta de la densidad de energía a bajas frecuencias. En definitiva, la controversia enfrentaba a dos clases de Física, la clásica y una nueva física aún sin interpretación (Einstein fue el primero en proponer los corpúsculos de luz).

El hecho de que la ley de Rayleigh-Jeans no resultara apropiada intrigaba a los físicos, puesto que había sido obtenida por Lorentz con un tratamiento distinto que se

basaba en el estudio de las vibraciones térmicas de los electrones de la cavidad metálica. La demostración de Lorentz tenía en cuenta el campo de radiación, que cumplía las ecuaciones de Maxwell y no utilizaba a los osciladores.

A partir de 1910 otros temas relacionados con la cuantización de la energía fueron desplazando de la literatura científica el tema del cuerpo negro.

Paulatinamente, experimentos y aplicaciones en estos campos, dieron resultados que eran consistentes con otros experimentos y con la estructura atómica de la materia. Cabe señalar el estudio de Einstein de los calores específicos, la aplicación de Wien al cálculo de la longitud de onda de los rayos X, el estudio de la radiación γ de Sommerfield, que conducía a un valor h muy cercano al que había obtenido Planck.

Paralelamente a este proceso, fue la progresiva conversión de los físicos a la idea del cuanto. Durante estos años, Planck intentó derivar su ley standard reduciendo al mínimo el papel de la Cuantización de la energía. Esta revisión había sido sugerida por una crítica de Lorentz que objetaba la baja intensidad de la radiación a bajas frecuencias, cuando la energía del cuanto era muy grande, lo que conducía a un tiempo de absorción del cuanto anormal.

Para evitar esta incongruencia, Planck restringe la hipótesis únicamente a la emisión. Con esta nueva hipótesis fue capaz de llegar a su ley estándar, pero utilizando una energía del oscilador que difería en una constante de la anterior.

El propio Planck aplicó esta conclusión al fenómeno de la radiactividad que estaba de acuerdo con otros fenómenos tales como el comportamiento del C_V del gas de hidrógeno a bajas temperaturas, las desviaciones de la ley de Curie en paramagnetismo y el efecto de la vibración térmica sobre el espectro de difracción por rayos X. Este último fenómeno, estudiado por Debye, mostró que sin la presencia de la energía en el punto cero para la energía del oscilador no podía ser explicada la intensidad de los puntos de difracción. Si bien la presencia de este sumando (la energía del oscilador) estaba acorde con la realidad, la nueva hipótesis que utilizaba Planck en su derivación, fue pronto rechazada por la concepción de la estructura atómica y líneas espectrales que permitía procesos discontinuos, tanto en la absorción como en la emisión. Finalmente, Planck

acabó en 1922, ante la evidencia de los experimentos de Stern-Gerlach, por abandonar la segunda teoría.

Ideas Principales.

- Durante el periodo de tiempo que transcurrió desde la publicación de la ley, los resultados experimentales en otras áreas, demostraron que la cuantización de la energía estaba relacionada con otros procesos de la naturaleza y que la dimensión del problema del cuerpo negro podía cambiar el rumbo de la física.

6. CUÁNTICA FICCIÓN

El siguiente estudio tendrá como objetivo analizar la repercusión en el desarrollo del problema del cuerpo negro, desde una visión actual considerando la hipótesis de que los fotones hubieran sido fermiones. Desde una visión actual el estudio termodinámico del problema queda invariante porque el estudio macroscópico del problema se limita a caracterizar una situación de equilibrio y no distingue entre bosones y fermiones. Siguen siendo válidas, por tanto, las leyes obtenidas por argumentos termodinámicos, como la ley de Stephan-Bolztmann, la ley de Wien... aunque con otras constantes.

El principio de exclusión de Pauli que rige el comportamiento de los fermiones influye decisivamente en un paso crucial en la ley de derivación de Planck. Cuando se intenta deducir la forma combinatoria de la entropía, hay que tener en cuenta que cada modo, es decir, cada oscilador no puede tomar más de una porción de energía de tamaño ε. Las complexiones o el conjunto de números que asigna los elementos de energía a cada modo y que es el origen del concepto de números de ocupación tal y como lo conocemos actualmente, Sólo puede tomar como máximo el valor 1, es decir, que cada oscilador puede tomar como máximo un elemento de energía.

La forma de tomar o repartir estos P elementos de energía entre los N osciladores con $P \leq N$, viene dada por la siguiente fórmula de tipo combinatorio:

N estados

P elementos; $P \leq N$; $NU = P\varepsilon$

$\binom{N}{P} = R = \dfrac{N!}{P!(N-P)!}$;Distribución de P elementos entre N estados

$$S = k\ \ln R = k\ \ln\left[\frac{N!}{P!(N-P)!}\right] =$$

$$= k\left[N\ln N - N - P\ln P + P - (N-P)\ln(N-P) + N - P\right] =$$

$$= k\left[N\ln N - \frac{NU}{\varepsilon}\ln\left(\frac{NU}{\varepsilon}\right) - \left(N - \frac{NU}{\varepsilon}\right)\ln\left(N - \frac{NU}{\varepsilon}\right)\right] =$$

$$= kN\left[-\frac{U}{\varepsilon}\ln\left(\frac{U}{\varepsilon}\right) - \ln\left(1-\frac{U}{\varepsilon}\right) + \frac{U}{\varepsilon}\ln\left(1-\frac{U}{\varepsilon}\right)\right] = kN\left[\left(\frac{U}{\varepsilon}-1\right)\ln\left(1-\frac{U}{\varepsilon}\right) - \frac{U}{\varepsilon}\ln\left(\frac{U}{\varepsilon}\right)\right]$$

de la relación $\dfrac{\partial S}{\partial U} = \dfrac{1}{T} = k\left(\dfrac{1}{\varepsilon}\ln\left(1-\dfrac{U}{\varepsilon}\right) + \left(\dfrac{U}{\varepsilon}-1\right)\dfrac{-1/\varepsilon}{1-U/\varepsilon} - \dfrac{1}{\varepsilon}\ln\dfrac{U}{\varepsilon} - \dfrac{U}{\varepsilon}\dfrac{1/\varepsilon}{U/\varepsilon}\right)$

$$= \frac{k}{\varepsilon}\left[\ln\left(1-\frac{U}{\varepsilon}\right) + 1 - \ln\frac{U}{\varepsilon} - 1\right] = \frac{k}{\varepsilon}\left[\ln\frac{\left(1-\frac{U}{\varepsilon}\right)}{\frac{U}{\varepsilon}}\right] \Rightarrow \frac{\varepsilon}{kT} = \ln\frac{\left(1-\frac{U}{\varepsilon}\right)}{\frac{U}{\varepsilon}} \Rightarrow e^{\frac{\varepsilon}{kT}} = \frac{1-\frac{U}{\varepsilon}}{\frac{U}{\varepsilon}}$$

$U = \dfrac{\varepsilon}{1+e^{\frac{\varepsilon}{kT}}}$; donde $u_\nu = \dfrac{8\pi\nu^2}{c^3}\dfrac{\varepsilon}{1+e^{\frac{\varepsilon}{kT}}}$; si $\varepsilon = h\nu$

$u_\nu = \dfrac{8\pi h}{c^3}\dfrac{\nu^3}{1+e^{\frac{h\nu}{kT}}}$ y cuando

1) $\nu \to 0$ $u(\nu,T) \cong \dfrac{8\pi h}{c^3}\dfrac{\nu^3}{1+\frac{h\nu}{kT}+1}$ y no reproducimos la ley de Reyleigh - Jeans

2) $\nu \to \infty$ $u(\nu,T) \cong \dfrac{8\pi h}{c^3}\nu^3 e^{\frac{-h\nu}{kT}}$ Ley de Wien

La relación entre la constante de Stephan-Bolztmann y la constante σ para el caso standard e hipotético (o ficticio)

$$u(\nu,T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}\frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}}-1} \Rightarrow u(\nu,T) = \frac{8\pi h}{c^3}\frac{\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{kT}}-1}$$

$$U = \int_0^\infty u(\nu,T)d\nu \text{ (Energía total / m}^3\text{)} =$$

$$= \frac{8\pi h}{c^3}\int_0^\infty \frac{\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{kT}}-1}d\nu = \frac{8\pi k^4T^4}{c^3h^3}\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x-1}dx = (si\ x = \frac{h\nu}{kT}) = \frac{8\pi k^4T^4}{c^3h^3}\cdot\frac{\pi^4}{15}$$

La ley de Stephan-Bolztmann asegura que $K = \sigma T^4$, donde K = radiancia espectral (Watt/m^2) y está relacionada con la densidad de energía, según concluyó Bolztmann por

$$U = \frac{4}{c} K \Rightarrow K = \frac{c}{4} U = \frac{2\pi^5 k^4}{15 c^2 h^3} T^4$$

$$\Rightarrow \sigma_{\text{standar}} = \frac{2}{15} \frac{\pi^5 k^4}{c^2 h^3}$$

Usando la ficticia ley de distribución:

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi h^2}{c^3} \frac{\nu^3}{e^{h\nu/kT} + 1}; \text{ llegamos al resultado}$$

$$U = \frac{2\pi k^4 T^4}{c^3 h^3} \int_0^\infty \frac{x^3}{e^x + 1} dx = \frac{2\pi k^4 T^4}{c^3 h^3} \frac{7\pi^4}{120}$$

$$\Rightarrow \sigma_{ficticia} = \frac{7}{240} \frac{\pi^5 k^4}{c^2 h^3} \Rightarrow \sigma_{ficticia} < \sigma_{\text{standar}}$$

Si comparamos el comportamiento para una determinada frecuencia de las curvas espectrales hipotética y verdadera, observamos claramente que a altas frecuencias el decrecimiento sigue gobernado por la exponencial y sigue cumpliéndose la ley de Wien, sin embargo, a bajas frecuencias el comportamiento difiere, siendo el crecimiento de la curva hipotética más lenta.

Efectivamente:

$$u_\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} + 1}$$

1) $\nu \to 0$; hacemos un desarrollo en serie hasta términos de segundo orden y por tanto nos queda:

$$u(\nu, T) \cong \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{h\nu}{\frac{h\nu}{kT} + 2}$$

que no es igual a la de Rayleigh-Jeans:

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} kT$$

sin embargo, cuando

2) $\nu \to \infty;\ u(\nu,T) \cong \frac{8\pi\nu^2}{c^3} h\nu e^{\frac{-h\nu}{kT}}$; que coincide con la ley de Wien.

En este caso hipotético no se hubiera sido capaz ni siquiera de reproducir el comportamiento a bajas frecuencias, hecho que hubiera causado un gran estupor entre los físicos de la época, puesto que clásicamente, la ley de Rayleigh-Jeans (que no hubiera sido conocida como tal) se derivaba mediante argumentos muy fiables y probablemente el comportamiento de la radiación negra a bajas frecuencias hubiera sido llamada por Ehrenfest la "Catástrofe Infrarroja ".

Continuando con nuestro proceso de especulación histórica, llegamos a la conclusión de que tal vez Planck no hubiera podido haber realizado el proceso de interpolación que hizo en el caso bosónico, a menos que otros o él mismo hubieran sido capaces de obtener este comportamiento por otros argumentos. Resulta curioso comprobar que la relación que caracteriza a la ley de Rayleigh-Jeans y la que analizamos es la misma

$$\frac{\partial^2 S}{\partial U^2} = \frac{c}{U^2}.$$

Según hemos analizado en el capítulo 3, cuando Planck hizo el proceso de interpolación que le condujo al resultado correcto, obtuvo la entropía del conjunto de osciladores y a partir de ahí pudo comprobar que mediante la revolucionaria hipótesis $E = nh\nu$, llegaba a una forma entrópica análoga a la de Bolztmann. Para obtener su ley mediante argumentos más sólidos, partió de la forma combinatoria de Bolztmann.

En nuestro caso hipotético, si no hubiera hecho el proceso de interpolación, no hubiera podido comprobar si la entropía se reducía a la forma combinatoria. Si suponemos que él se hubiera entregado a la mecánica estadística como último recurso para el estudio del problema, hubiera comprobado sorprendido que la ley que él obtenía difería muy poco de la experimental, y sin duda esto le hubiera animado a realizar un proceso inverso desde la ley correcta para intentar averiguar que error había cometido en su derivación. Realizando este proceso, se llega a la conclusión que las complexiones o números de ocupación de cada oscilador cumplirían lo que hoy en día conocemos como el Principio de Exclusión de Pauli, es decir, que cuando disponemos de P elementos de energía entre N osciladores, $P \leq N$, las formas de repartirlos vienen dadas por

$$R = \frac{N!}{P!(N-P)!}.$$

Ideas Principales:

- Probablemente Planck se había convertido mucho antes a la idea del cuanto si los fotones hubiesen sido fermiones.

- Funcionando de forma inversa a partir de la ley de distribución que funcionaba (en el caso fermiónico) hubiera llegado a los números de ocupación para los diferentes modos, aunque se habría mostrado incapaz de explicarlos.

BIBLIOGRAFIA.

- Thomas S. Khun. LA TEORIA DEL CUERPO NEGRO Y LA DISCONTINUIDAD CUANTICA (1894 - 1912). Editorial Alianza Universidad.
- Max Hammer. QUANTUM THEORY. Capítulo 1: The Formation of Quantum Conceptions
- M. J. Klein, Thermodynamics and Quanta in Planck's Work, *Physics Today* **19** (1966), 23-32.
- R. Eisberg, Robert Resnick. FISICA CUANTICA. Editorial Limusa.