"NÚMERO EXACTO DE TRIÁNGULOS GENERADOS POR LA PARTICIÓN EN 4 TRIÁNGULOS POR EL LADO MAYOR (4T-LE)"

Ángel Plaza

Technical Report. nº 002 - 2002

Nº de Páginas: 34

2002

IUMA

INSTITUTO UNIVERSITARIO DE MICROELECTRÓNICA APLICADA

Universidad de Las Palmas de Gran Canaria – Campus Universitario de Tafira – 35017 – Las Palmas de Gran Canaria – ESPAÑA
Teléfono: + 34 928 451 250 (centralita) – Fax: + 34 928 451 243 — http://www.iuma.ulpgc.es/

Número exacto de triángulos generados por la partición en 4 triángulos por el lado mayor (4T-LE)

Angel Plaza *

9 de julio de 2002

Resumen

La partición en 4 triángulos por el lado mayor (partición 4T-LE) se obtiene al dividir un triángulo en cuatro triángulos hijos uniendo el punto medio de la arista mayor con el vértice opuesto y con los puntos medios de las otras dos aristas.

En este trabajo se revisan y mejoran drásticamente cotas anteriores sobre el número de triángulos no semejantes generados mediante la aplicación reiterada de la partición 4T-LE a un triángulo inicial cualquiera. Más aún, mediante argumentos geométricos simples, se demuestra que el número exacto de triángulos distintos que aparecerán mediante la aplicación de la partición 4T-LE a cualquier triángulo t_1 puede ser conocido *a priori* mediante un sencillo procedimiento.

Como consecuencia se tiene así otra prueba matemática de la conocida propiedad de no-degeneración del algoritmo de refinamiento basado en la partición 4T-LE. También como corolario, es discutida y delimitada la llamada *propiedad de auto-mejora* del algoritmo de refinamiento. Finalmente, se estudia el comportamiento de la sucesión de los segundos ángulos mayores de los triángulos distintos generados.

Palabras clave: particiones, adyacencias, generación de malla y refinamiento, mallas de tetraedros, geometría euclídea.

Clasificación AMS: 51M20, 52B10, 65M50, 65N50, 65M60, 65N20, 51N30, 51M15.

*Departamento de Matemáticas, Universidad de Las Palmas de Gran Canaria, 35017-Las Palmas de Gran Canaria, e-mail: aplaza@dma.ulpgc.es

1 Introducción: Triangulaciones, particiones y algoritmos

En los últimos años se han propuesto y desarrollado diversos métodos adaptativos y multimalla de elementos finitos [2, 16, 34]. Como es sabido, en el método de los elementos finitos una etapa crucial es la subdivisión del dominio de definición del problema en derivadas parciales en elementos más pequeños de geometría simple (los elementos finitos). Con esta subdivisión y la apropiada elección del tipo de aproximación se consiguen soluciones aproximadas al problema original. Estas subdivisiones del dominio original de definición se llaman *mallas* o *triangulaciones* si se trabaja con símplices.

En este contexto aparecen diversos problemas:

- definición de la malla inicial del dominio, para la que se puede tener como entrada del problema, además del dominio a ser mallado, una nube de puntos que serán los vértices de la triangulación que se busca.

- cálculo de los errores por elemento.

- refinamiento local de la malla, mediante, por ejemplo la inclusión en las zonas de mayor error de una discretización más fina. Este refinamiento local puede conseguirse de muy diversas maneras. Básicamente caben dos grandes opciones: remallado de toda la triangulación sobre una nueva nube de puntos que tiene mayor densidad donde mayor es el error, o bien, partición de los elementos que ofrecen mayor error.

Sobre todo en problemas evolutivos, en los que la zona de refinamiento cambia con el incremento de tiempo, la capacidad de la malla para adaptarse es la propiedad esencial que permite al método de los elementos finitos trabajar con un número de nodos mínimo. Como el sistema de ecuaciones asociado al método de los elementos finitos es del orden del número de nodos multiplicado por el número de grados de libertad por nodo, es muy importante mantener el número de nodos tan pequeño como sea posible para alcanzar la solución con la tolerancia deseada.

Muchas particiones y algoritmos de refinamiento (y de desrefinamiento) se han estudiado en la literatura dentro del área de los métodos finitos adaptativos tanto en dimensión dos [5, 6, 11, 14, 35, 36, 37], como en dimensión tres [1, 8, 9, 19, 20, 21, 23, 25, 31, 32, 38]. Con el fin de trabajar con soluciones singulares, es indispensable la capacidad de estos algoritmos de utilizar refinamientos locales de la discretización, y ciertamente son deseables características como la *no-degeneración* de los elementos y la *conformidad* y *suavidad* de la malla generada.

No-degeneración significa que el ángulo mínimo de los triángulos no tiende a cero cuando la partición es aplicada cualquier número de veces. *Conformidad* se refiere al

requisito de que la intersección de dos triángulos no disjuntos debe ser o bien un vértice común, ó una arista común, y la *suavidad* establece que la transición entre elementos grandes y pequeños debe ser gradual.

Los algoritmos basados en la bisección por el lado mayor (bisección LE) de los triángulos en 2D y de los tetraedros en 3D, se han desarrollado para dar solución al problema anterior. En dimensión dos, estos algoritmos garantizan la obtención de triangulaciones irregulares encajadas de buena calidad. Que las mallas así obtenidas tengan buena calidad se debe tanto a la condición de acotación de los ángulos menores de los triángulos generados (*min-min condition*) [41] como también a que el refinamiento fuera de la región de refinamiento (por razones de hacer *conforme* la malla que aparece) sigue una estrategia que asegura la suavidad del mallado final. Además, a pesar de la estrategia de refinamiento por conformidad se ha demostrado que el *efecto dominó* está limitado por la geometría de la triangulación inicial, y éste se hace menor a medida que se utiliza este tipo de particiones y algoritmos [45]. Además el tiempo de cálculo de estos algoritmos es lineal con respecto al número de nodos introducidos en la zona de refinamiento [40].

Estos algoritmos han sido implementados en software adaptativo y usados con éxito para resolver diversos problemas estacionarios y evolutivos en el contexto de elementos finitos y métodos multimalla (ver, por ejemplo [14, 26, 34]). Junto con los algoritmos de refinamiento que introducen nodos en la malla, también se han desarrollado los algoritmos inversos (llamados de desrefinamiento) que eliminan los nodos menos significativos del mallado. Con la combinación refinamiento/desrefinamiento se consigue que el número de nodos que se usan en la simulación de un proceso evolutivo esté acotado [14, 36].

También se han utilizado en dimensión tres extensiones de los algoritmos existentes en dimensión dos. Entre ellos cabe citar aquellos debidos a Arnold, Mukerjee y Pouly [1, 23], Bey [8, 9], Kossaczký [19], Liu y Joe [20], Maubach [21] todos ellos basados en división en ocho tetraedros, aunque no exactamente en bisección por la arista mayor; Muthukrishnan, Shiakolas, Nambier y Lawrence [25] y Rivara y Levin [38] presentan algoritmos basados en la bisección pura por la arista mayor de mallas de tetraedros. Y, por último, cabe citar el algoritmo 3D-SBR presentado por Plaza y Carey [31] del que también se ha desarrollado el algoritmo inverso de des-refinamiento [28, 32], que tiene como principal característica ser la extensión a dimensión tres del algoritmo de refinamiento de Rivara basado en la partición en 4 triángulos por el lado mayor (4T-LE), es decir el algoritmo 3D-SBR está basado en la partición en 8 tetraedros por la arista mayor (8T-LE).

Hay que resaltar aquí que muchas de las buenas propiedades de que gozan los algoritmos basados en la bisección por el lado mayor en dimensión dos, están por ser demostradas en sus análogas extensiones a dimensión tres, si bien empíricamente parece que también las verifican [31, 38]. De hecho el problema de averigüar si el refinamiento por bisección de tetraedros hace que los ángulos sólidos generados estén acotados inferiormente, es de-

cir que las mallas obtenidas son no degeneradas, se ha considerado como un interesante problema abierto en Geometría Computacional [27].

Los algoritmos en 2D han sido también utilizados para ajuste automático y adaptativo de superficies mediante splines Powell-Sabin sobre triangulaciones [12]. Las particiones de triángulos basadas en el lado mayor han sido la base también de estrategias de inserción de puntos que aseguran la construcción de triangulaciones de buena calidad en el contexto de los algoritmos de refinamiento tipo Delaunay [10, 29]. Incluso se han estudiado propiedades de tipo fractal es este tipo de algoritmos en 2D [30, 37].

Se debe destacar que el problema del refinamiento local de una triangulación [40] es esencialmente distinto del problema de la triangulación clásico en el sentido siguiente: en lugar de tener un conjunto fijo de puntos que ha de ser triangulado, se tiene la libertad de elegir los puntos más adecuados para añadirlos al dominio y construir una malla con la resolución deseada. La construcción de la malla se suele realizar dinámicamente. Es más, se puede aprovechar la existencia de una malla previa de referencia (construida por ejemplo por el método de Delaunay) con el fin de reducir el coste del refinamiento.

Después de fijar la subregión R del dominio Ω que define el área de refinamiento, un parámetro de resolución ϵ que normalmente hace referencia al diámetro (longitud del lado mayor) de los triángulos, el problema del refinamiento de una triangulación se puede enunciar así:

Dada una triangulación inicial τ_0 de un dominio Ω de frontera poligonal, construir una triangulación localmente refinada, tal que el diámetro de los triángulos que intersecan el área de refinamiento R sea menor que el parámetro prefijado ϵ.

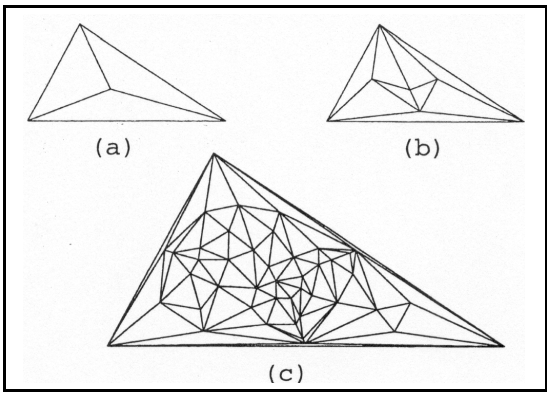


Figura 1: Triangulaciones de Delaunay con inserción de puntos en los baricentros de los triángulos anteriores [Rivara-Iribarren] [37]

Aunque el algoritmo de Delaunay construye la malla óptima, es decir la más equilátera, en el problema clásico de la triangulación, esto es, sobre una nube de puntos dada, el

algoritmo de Delaunay no tiene asociada de forma natural una estrategia de inserción de puntos óptima que garantice la construcción de triangulaciones irregulares de buena calidad cuando es utilizado de forma iterativa. Para ver esto, basta realizar un simple experimento con la estrategia de introducir los nuevos puntos en los baricentros de los triángulos generados anteriormente. La triangulación de Delaunay, con esa estrategia que *a priori* puede parecer adecuada, hace que las mallas que van apareciendo sean cada vez de peor calidad, especialmente cerca de la frontera del dominio. Véase la Figura 1 tomada de [37], en la que se muestran tres pasos diferentes de ese experimento.

Para obtener un software de refinamiento local robusto con el método de Delaunay se necesita alguna estrategia para introducir automáticamente una distribución de puntos que tras un número arbitrario de pasos de refinamiento local garantice la construcción de mallas no degeneradas. La partición por el lado mayor ha sido la base para desarrollar tales metodologías [10, 29]: inserción de puntos en los puntos medios de las aristas en combinación con el método de Delaunay. En este sentido, Bova y Carey [10] usan además conceptos de la geometría fractal y sistemas de funciones iteradas para construir una nube de puntos sobre la que aplicar después la triangulación de Delaunay. Penman y Grieve [29] utilizan un método heurístico que elige entre el punto medio del lado mayor y el baricentro del triángulo dependiendo de la forma del triángulo considerado.

Tanto el refinamiento basado en la bisección por el lado mayor como el refinamiento mixto: inserción de puntos en los puntos medios de los lados mayores y triangulación de Delaunay, son buenas soluciones (de orden lineal) al problema del refinamiento local de una triangulación [40]. Sin embargo, los algoritmos basados en la bisección por el lado mayor son más adecuados en los siguientes contextos:

- refinamiento y desrefinamiento de triangulaciones como aquellas necesarias en la resolución de problemas complejos dependientes del tiempo [14, 36].

- utilización en la práctica de los métodos multimalla sobre mallas irregulares [14, 16, 34], ya que estos algoritmos garantizan la construcción de una secuencia de mallas encajadas en las que resulta muy sencillo implementar las operaciones de restricción y prolongación.

Los resultados que se recogen en este trabajo han sido obtenidos en la búsqueda de la demostración de la no degeneración de los algoritmos de bisección por el lado mayor de tetraedros. En lo que resta de esta Sección se presentan las particiones y algoritmos de refinamiento más empleados en la práctica en 2 dimensiones.

En la Sección siguiente se demuestra una fórmula *a priori* del número de triángulos que pueden aparecer por la aplicación reiterada de la partición 4T-LE sobre un triángulo original. Como consecuencia, se obtienen algunas cotas sobre la *propiedad de automejora* de la partición. Éstas dependen de la geometría de la malla inicial.

Definiciones preliminares

Definición 1.1 (m-simplex) Sea $V = \{X_0, X_1, \ldots, X_m\}$ un conjunto de $m+1$ puntos en $\mathbb{R}^n$ $(1 \leq m \leq n)$ tal que $\{\overrightarrow{X_0X_i}: 1 \leq i \leq m\}$ es un conjunto de vectores linealmente independientes en $\mathbb{R}^n$. Entonces la envoltura convexa cerrada de V denotada por $S =< V >=< X_0, X_1, \ldots, X_m >$ se denominará simplex m-dimensional ó m-simplex en $\mathbb{R}^n$, mientras que los puntos $X_0, \ldots, X_m$ se denominarán *vértices de* S [18]. ■

A lo largo de este documento se usarán los términos simplex y símplice indistintamente.

De esta manera un tetraedro (cerrado) se define por el conjunto (no ordenado) de sus vértices $< X_0, X_1, X_2, X_3 >$, y una cara por sus tres vértices $< X_i, X_j, X_k >$. Una arista queda definida por un par de vértices distintos $< X_i, X_j >$. Vértices, aristas, caras y tetraedros son, respectivamente $0-, 1-, 2-$, y $3-$símplices. Cualquier $i-$simplex contenido en un $n-$simplex S (con $i < n$) será denominado $i-$simplex ó $i-$cara de S. Como no importa el orden de los vértices para definir las caras, resulta que el número de k-caras de un m-símplice es igual a $\binom{m+1}{k+1}$. Así por ejemplo el número de $(m-1)$-caras es igual al número de vértices del m-simplex: $\binom{m+1}{m} = \binom{m+1}{1} = m+1$.

Definición 1.2 (Malla conforme de símplices) Sea Ω un conjunto acotado en $\mathbb{R}^n$ (n=2 ó 3, aunque la definición es válida en general) con interior no vacío, $\overset{\circ}{\Omega} \neq \emptyset$, y de frontera poligonal $\partial\Omega$. Una partición de Ω en $n-$símplices $\tau = \{t_1, \ldots, t_k\}$ tal que (i) $\Omega = \cup t_i$; (ii) $\overset{\circ}{t_i} \cap \overset{\circ}{t_j} = \emptyset$ si $i \neq j$; (iii) $\overset{\circ}{t_i} \neq \emptyset$, se denominará una **triangulación** de Ω.

Dos símplices t_i, t_j de τ se dicen **adyacentes** si $t_i \cap t_j \neq \emptyset$.

Si τ es tal que símplices adyacentes comparten una cara entera, ó una arista entera ó un vértice, se dice que τ es una **triangulación conforme** ó también que no hay nodos no conformes en τ (en dimensión tres se dirá teselación conforme ó triangulación conforme en dimensión tres), ver Figura 2. ■

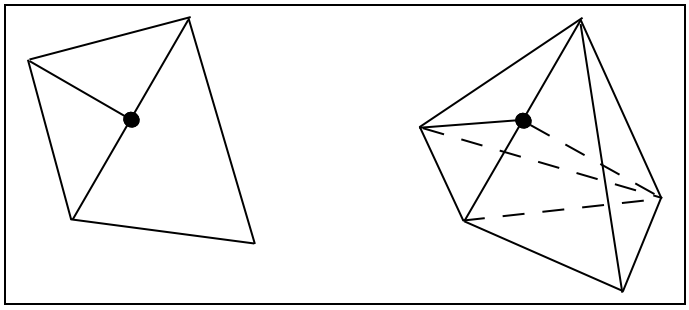


Figura 2: Nodo no conforme en dos y tres dimensiones

Una malla conforme de k-símplices también recibe el nombre de Complejo k-Simplicial Euclídeo o k-complejo, ver [13, 42].

Definición 1.3 (Esqueleto) Sea τ una malla de n-símplices. El conjunto $skt(\tau) = \{f : f$ es una $(n-1)$-cara de algún $t_i, con\ t_i \in \tau\}$ se denominará *esqueleto* o $(n-1)$-esqueleto de τ, también denotado por $(n-1) - skt(\tau)$ [7]. ■

Por ejemplo, el esqueleto de una triangulación en dimensión tres está compuesto por las caras triangulares de los tetraedros, y en dimensión dos el esqueleto es el conjunto de las aristas de los triángulos. Es de destacar que el esqueleto puede ser visto como una nueva triangulación del conjunto compuesto de todas las $(n-1)$-caras de la triangulación inicial. Si τ es una triangulación conforme tridimensional en $\mathbb{R}^3$, $skt(\tau)$ es una triangulación conforme bidimensional contenida en $\mathbb{R}^3$ o una triangulación $2D\frac{1}{2}$ [15].

El esqueleto puede ser aplicado de forma recursiva: $skt(skt(\tau)) = \{f : f$ es una $(n-2)$-cara de alguna $s \in skt(\tau)\}$. De hecho, si τ es una malla n-simplicial, $skt(skt(\tau))$ se denominará el $(n-2)$-*esqueleto* de τ, y así sucesivamente.

Nótese que este concepto no está relacionado con el de *objeto medio* también llamado esqueleto en la literatura [17, 33], pero sí con la idea topológica de esqueleto de un complejo euclídeo [24, 46].

Definición 1.4 (Bisección por una arista) Sea $S =< X_0, X_1, \ldots, X_m >$ un m-simplex en $\mathbb{R}^n$, con arista $< X_j, X_k >$ teniendo como punto medio $A = (X_j + X_k)/2$. Entonces podemos formar dos nuevos símplices

$$S_1 =< X_0, \ldots, X_{j-1}, A, X_{j+1}, \ldots X_k \ldots X_m >$$
$$S_2 =< X_0, \ldots, X_j, \ldots, X_{k-1}, A, X_{k+1}, \ldots X_m >$$

Estos símplices tienen interiores disjuntos y $S = S_1 \cup S_2$. Esto define una subdivisión de S por bisección de la arista o bisección simple [18, 35]. ■

Frecuentemente se escoge como arista de bisección de S la arista mayor [7, 38, 20]. Se dice que se ha realizado una bisección por la arista mayor o bisección LE (ver Figura 4(a)).

Definición 1.5 (Arista entorno) Sea τ una malla simplicial n-dimensional. Al aplicar el refinamiento por bisección de los elementos, denominamos *arista entorno* de un nodo N a la arista en la cual N está en el punto medio. ■

Definición 1.6 (Molécula de un nodo) Para cualquier triangulación conforme τ, la molécula asociada a P es la lista ordenada de los ángulos de los triángulos que comparten el vértice P en τ. ■

Lema 1.1 *La bisección de un m-simplex S por una arista induce la bisección de todos los k-símplices en S que contienen la arista seleccionada con $k < m$ [28].* □

Particiones en 2D

Algunas de las particiones de triángulos más utilizadas en la práctica son las siguientes:

La partición en 4-triángulos semejantes

Esta partición ha sido utilizada en el contexto del método de los elementos finitos [5, 11].

Definición 1.7 La partición en 4-triángulos semejantes de un triángulo t se obtiene uniendo los puntos medios de las aristas de t con segmentos paralelos a las aristas (ver Figura 3(b)). ■

La aplicación de la partición en 4-triángulos semejantes a cualquier triángulo produce cuatro triángulos semejantes al inicial. Por tanto la aplicación reiterada de esta partición a cualquier triángulo no genera otro triángulo (en cuanto semejanza) que el original. Esta propiedad es muy conveniente para el problema del refinamiento local. El problema de la conformidad de la malla fue resuelto por Bank y Sherman [5] con la llamada *green division* que consiste en que los nodos no conformes se hacen conformes uniéndolos con los vértices opuestos. De esta forma, no es necesario introducir en la malla nuevos nodos para lograr la conformidad, pero aparecen nuevos triángulos no semejantes a triángulos de la malla anterior, y así no se puede asegurar la no degeneración del algoritmo de refinamiento.

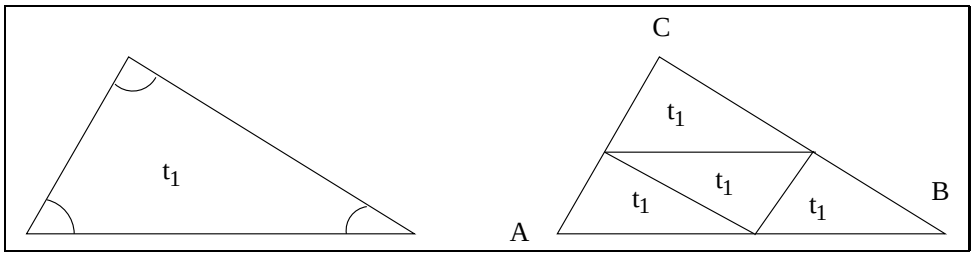


Figura 3: Partición 4T semejante del triángulo t_1

La partición en 4-triángulos por la arista mayor

La partición en 4-triángulos por la arista mayor ha sido presentada y estudiada por Rivara y colaboradores durante los últimos 15 años [35, 37, 38].

Definición 1.8 La partición en 4-triángulos por el lado mayor (4T-LE) se obtiene uniendo el punto medio de la arista mayor con el vértice opuesto y con los puntos medios de las otras dos aristas (ver Figura 4(b)). ■

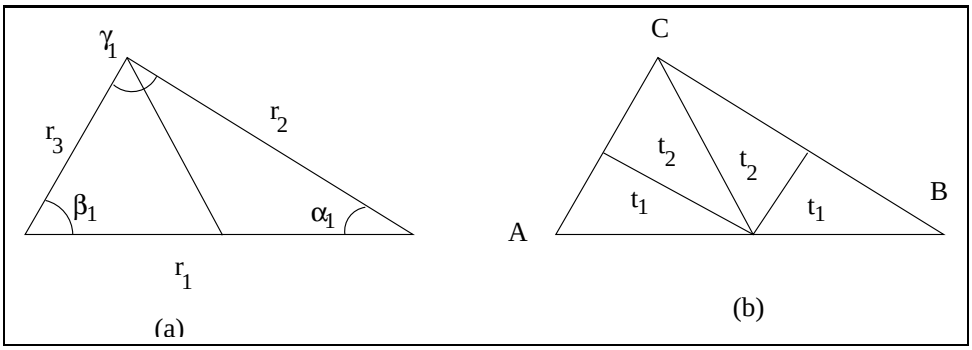


Figura 4: (a) Partición LE del triángulo t_1, (b) Partición 4T-LE del triángulo t_1

Después de aplicar la partición 4T-LE a un triángulo t_1, aparecen dos triángulos semejantes al original (situados sobre la arista mayor del triángulo padre) y otros dos triángulos (posiblemente) no semejantes al triángulo inicial (ver Figura 4(b)).

Rivara [34, 35, 36, 37, 40] ha desarrollado y estudiado un algoritmo eficiente de bisección en base a la partición 4T-LE. Tanto la bisección LE, como el algoritmo 4T-LE tienen muy buenas propiedades en cuanto a la regularidad de los elementos a los que da lugar. Un algoritmo equivalente basado en el esqueleto de la triangulación ha sido desarrollado por Plaza y Carey en [31]. A este algoritmo se le ha incorporado una estructura de datos también basada en el esqueleto en [44]. La conformidad en los algoritmos basados en la bisección LE y en la partición 4T-LE se logra del siguiente modo: si algún triángulo tiene algún nodo no conforme en uno de los lados que no sea el mayor se introduce otro nodo en el lado mayor y se une con el vértice opuesto; después un segmento paralelo a uno de los lados hace conforme el nodo inicial. Este proceso puede extenderse a otros triángulos vecinos. En este caso se dice que el refinamiento se extiende por conformidad. En estos algoritmos, los ángulos de los triángulos para refinamientos de mallas locales están uniformemente acotados entre 0 y π.

Otro método de bisección semejante al de Rivara es el presentado por Mitchell [22]. La arista del triángulo que va a ser biseccionada se determina sin ningún tipo de cálculo computacional. Solamente se crean cuatro clases de triángulos similares y ocho ángulos distintos. Se satisface también la importante condición de que los ángulos están uniformemente acotados en un intervalo contenido estrictamente entre 0 y π. También necesita refinamientos adicionales para conseguir la conformidad de la malla.

El algoritmo 4T de Rivara

El Algoritmo 4T desarrollado por Rivara en 1984 [34, 35, 36] como un tipo particular de algoritmo basado en la bisección por la arista mayor, se puede describir en función de tres patrones de refinamiento que aparecen en la Figura 5, donde P es el punto medio de la arista mayor.

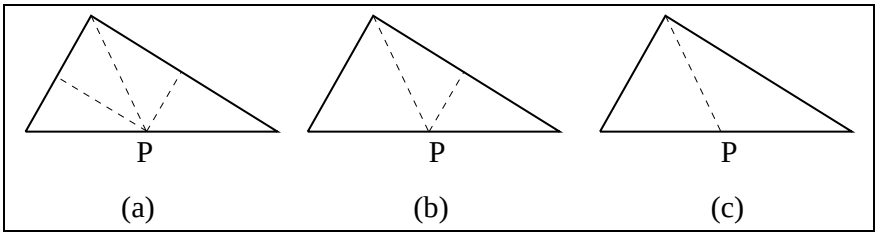


Figura 5: Patrones del refinamiento 4-T

El siguiente esquema resume el algoritmo 2D basado en el esqueleto. Para más detalles sobre la estructura de datos incorporada en el esquema ver [44]. Sólo apuntamos aquí que $G^1(\tau)$ es el grafo asociado al 1-skt(τ), y que $LEPP$ es la lista de propagación por el lado mayor, esto es la lista de triángulos cada uno compartiendo con el anterior la arista mayor del anterior.

Algoritmo 2D-SBR $\{\tau, t_0\}$
/* Entrada: malla τ y triángulo a refinar t_0
/* Salida: malla τ
1: $L = 1 - skt(t_0)$
Para cada arista $e_i \in L$ **hacer**
    Subdivisión(e_i)
Fin Para
2: Para cada arista $e_i \in L$ **hacer**
    $S_i = LEPP(e_i, G^1(\tau))$
    Para cada triángulo $t_i \in S_i$ **hacer**
        Sea e_i la arista mayor de t_i
        Subdivisión(e_i)
    Fin para
3: Para cada triángulo $t_j \in \tau$ a subdividir **hacer**
    Subdivisión(t_j)
Fin para
Fin algoritmo

Propiedades

La aplicación del algoritmo 4-T produce un subconjunto de los triángulos que se obtienen a partir de la bisección de la arista mayor, de forma que podemos enunciar los siguientes teoremas [36]. Estas propiedades se basan en trabajos de Rosenberg y Stenger [41] y Stynes [43] sobre el método de bisección de un triángulo y están recogidas por Rivara en [35]:

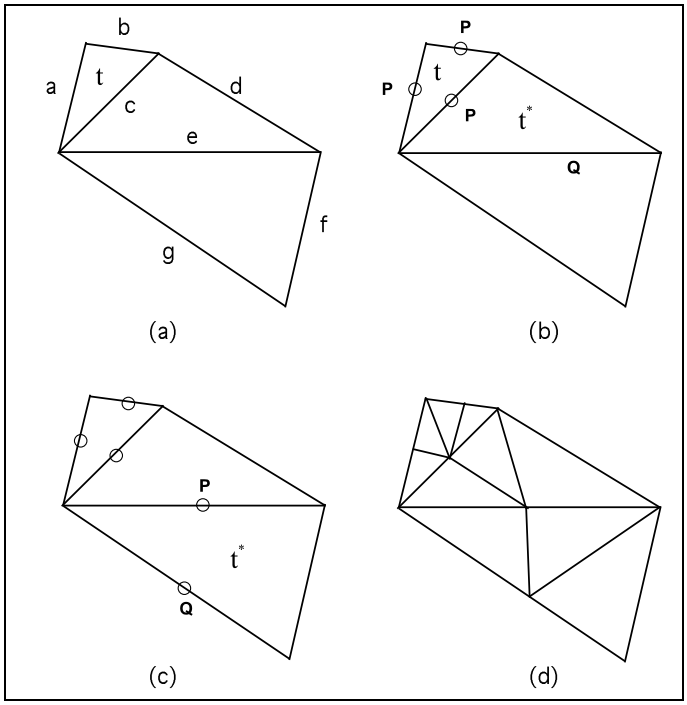


Figura 6: Ejemplo del Algoritmo 2D-SBR para refinar t

Proposición 1.1 *Sea α_0 el menor ángulo de un triángulo* t. *Si dividimos reiteradamente* t *y los triángulos siguientes mediante la bisección por el lado mayor, y llamamos α_j al menor ángulo interior de la j-ésima triangulación así obtenida –obsérvese que no tiene por qué ser conforme–, entonces se tiene:*

$$\alpha_j \geq \frac{\alpha_0}{2} \tag{1}$$

□

Proposición 1.2 *Si h_0 es el diámetro del triángulo inicial* t *–esto es, la longitud del lado mayor–, y h_j el diámetro de la malla obtenida tras j refinamientos, entonces existe un entero positivo N, tal que:*

$$h_{2j} \leq \sqrt{3}^{min(j,N)} \left(\frac{1}{2}\right)^j h_0 \tag{2}$$

□

De la Proposición 1.1, Rivara deduce que para triangulaciones obtenidas de la aplicación de sus algoritmos 2-T ó 4-T a una triangulación inicial, se tiene la misma relación entre sus ángulos mínimos.

Además, si notamos por h_i el diámetro de un triángulo $t_i \in \tau_j$, entonces para todo par de triángulos adyacentes t_1 y t_2 de τ_j, se tiene:

$$\frac{\min(h_1, h_2)}{\max(h_1, h_2)} \geq \delta > 0 \tag{3}$$

La ecuación (1) hace referencia a la no degeneración de la malla, mientras que la ecuación (3) nos da información sobre la gradualidad de la discretización. Estas dos propiedades le permiten a Rivara hablar de triangulaciones que pertenecen a la misma familia de triangulaciones conformes, ya que las constantes α_0 y δ dependen de la triangulación inicial y caracterizan tales familias de triangulaciones.

Teorema 1.1 *La aplicación reiterada del Algoritmo 4-T sobre cualquier triangulación conforme τ: (1) produce triángulos cuyo ángulo mínimo está acotado como función de la calidad de la triangulación inicial; (2) produce un número finito de clases de semejanza; (3) las triangulaciones que se obtienen tienden a mejorar en el sentido de que el porcentaje de los triángulos de buena calidad y el área cubierta por ellos, se incrementa conforme se realiza el refinamiento.* □

Se puede resaltar además, que la partición del algoritmo 4-T da lugar a las siguientes propiedades de mejora [35, 36, 37]:

Teorema 1.2 *Para cualquier triángulo obtuso t_0 cuyo ángulo más pequeño sea α_0 y el ángulo mayor γ_0, la partición de t_0 da lugar a un único triángulo no semejante t_1, cuya división 4T-LE da lugar a un nuevo triángulo no semejante t_2, y así sucesivamente hasta que se obtiene el último triángulo no obtuso t_n. Por otra parte, los ángulos más pequeños α_i y los más grandes γ_i de cada t_i satisfacen las siguientes relaciones:*

$$\alpha_0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_n$$
$$\gamma_0 > \gamma_1 > \gamma_2 > \ldots > \gamma_n$$

□

Objetivo de este trabajo es delimitar esta propiedad de automejora de la partición 4T-LE.

Además, para el algoritmo 4T-LE, se puede probar fácilmente una propiedad fractal análoga a la que se da en el algoritmo de la bisección LE [37, 40].

Teorema 1.3 *[28] Después de la aplicación iterativa (local) de un número finito de veces del algoritmo 4T-LE alrededor de cualquier vértice P de cualquier triangulación conforme τ, se obtiene una molécula* estable *alrededor de P, en el sentido de que las siguientes iteraciones del algoritmo no dividen los ángulos de la molécula estable, pues únicamente introducen nuevos vértices a lo largo de las aristas de la molécula estable. Además, cada nuevo triángulo en torno a P a través de las iteraciones, será semejante a su triángulo padre (comportamiento fractal).* □

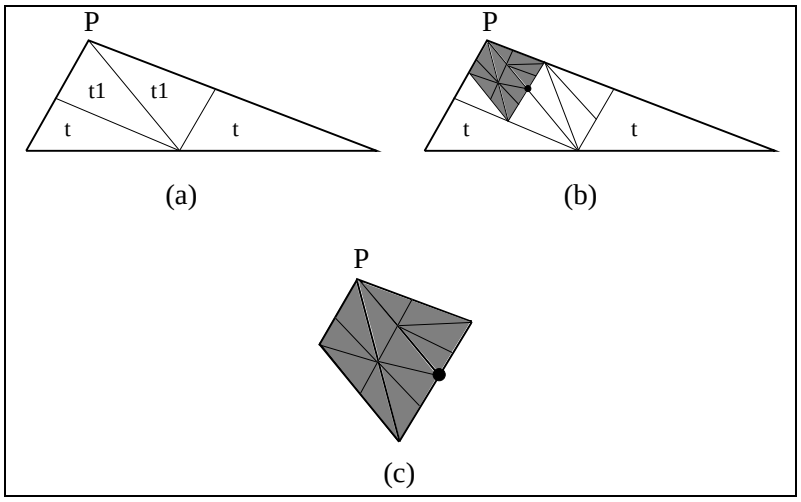


Figura 7: Comportamiento fractal del algoritmo 4T-LE. La figura (c) muestra la molécula estable de P

En la Figura 7 se observa un ejemplo de división 4T-LE y su comportamiento fractal. Esta estructura fractal de la combinación refinamiento/desrefinamiento ha sido también explicada vía sistemas de funciones iteradas en [30].

2 Número de triángulos generados por la partición 4T-LE

Planteamiento del problema

Nos planteamos el cálculo del número de triángulos distintos, es decir no semejantes, que se generan por la aplicación reiterada de la partición en 4 triángulos por el lado mayor. La cuestión equivale a en qué condiciones, si hay alguna, la aplicación de la partición 4T-LE no lleva a la generación de nuevos triángulos.

Sean ϵ, σ, y δ a los ángulos del triángulo de segunda generación t_2, como en la Figura 8. La cuestión se convierte en la siguiente: *¿En qué condiciones el ángulo mayor de t_2 es δ?* O bien, si se considera que la arista AB cumple:

$$|AB| = \frac{r_3}{2} \leq \frac{r_2}{2}$$

entonces la cuestión es: *¿En qué condiciones $\delta \geq \sigma$?* Un ejemplo de esta situación se muestra en la Figura 9. Éste es el caso para todos los triángulos iniciales agudos t_1, mientras que para triángulos rectos sólo se generan triángulos semejantes al original. Por tanto, de aquí en adelante supondremos que el triángulo original es obtuso.

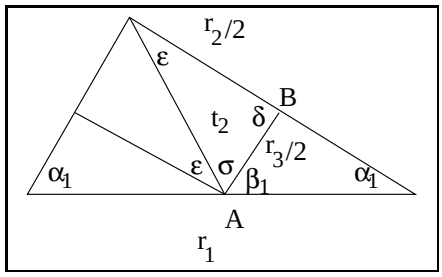


Figura 8: Notación para los nuevos ángulos

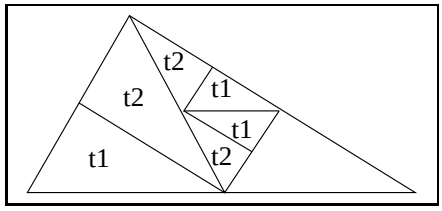


Figura 9: Caso donde no se generan nuevos triángulos

Mejora de una cota previa

Teorema 2.1 *El número de triángulos no semejantes que aparecen en la aplicación reiterada de la partición 4T-LE a un triángulo inicial t_1, N, verifica la fórmula:*

$$N \leq \left\lceil \left| \frac{\gamma_1 - \frac{\pi}{2}}{\alpha_1} \right| \right\rceil + 1 \tag{4}$$

Prueba Es suficiente considerar el caso de un triángulo obtuso inicial t_1. En ese caso, como probaron Rivara e Iribarren [37, Teorema 2, pág. 1491], la aplicación reiterada de la partición 4T-LE a un triángulo t_1 produce después de cada aplicación como mucho un

nuevo triángulo (bajo semejanza), y este nuevo triángulo es menos obtuso que el anterior hasta que el ángulo mayor del triángulo generado es no obtuso. Más aún, mientras el triángulo t_2 es obtuso se tiene $\epsilon + \sigma = \gamma_1$ y $\frac{\pi}{2} < \gamma_2 = \sigma = \gamma_1 - \epsilon$ De hecho, $\gamma_2 = \gamma_1 - \epsilon = \gamma_1 - \alpha_2$ mientras el triángulo t_2 es obtuso.

Por tanto el argumento de [37, Teorema 4, pág. 1492], sirve mientras el ángulo mayor del triángulo permanece obtuso, es decir mientras $\gamma_N \geq \frac{\pi}{2}$. □

La cota propuesta por Rivara e Iribarren en [37] era

$$N \leq \left\lceil \frac{\gamma_1 - \frac{\pi}{3}}{\alpha_1} \right\rceil + 1 \tag{5}$$

mientras que la nueva cota tiene en cuenta que el argumento debe aplicarse mientras el ángulo mayor γ_N sea obtuso, es decir mientras $\gamma_N \geq \frac{\pi}{2}$.

Observación 2.1 *La nueva cota es ajustada para el caso del triángulo rectángulo. En ese caso no aparecen nuevas clases de semejanza por la partición. También es ajustada para algunos triángulos obtusángulos. Ver por ejemplo los triángulos 4 y 5 en la Tabla 2, página 29.*

Sin embargo, en muchos triángulos obtusos con ángulo menor cercano a cero, está lejos de ser satisfactoria. Véanse triángulos 1, 2 y 3 en la Tabla 2. Esta cota puede mejorarse en el siguiente sentido:

Teorema 2.2 *Sea t_1 un triángulo inicial (obtuso), y supongamos que tras K aplicaciones de la partición 4T-LE sobre t_1 la generación de nuevos triángulos (bajo semejanza) no ha parado, entonces el número de triángulos distintos que se pueden generar está acotado por la fórmula:*

$$K + 1 \leq N \leq \left\lceil \left| \frac{\gamma_{K+1} - \frac{\pi}{2}}{\alpha_{K+1}} \right| \right\rceil + K + 1 \tag{6}$$

□

Esta fórmula tiene en cuenta el hecho de que el ángulo máximo de los triángulos generados decrece y el ángulo mínimo crece al aplicar la partición 4T-LE. Por tanto, como el número de triángulos generados después de K aplicaciones de la partición 4T-LE es $K+1$, la cota se mejora substancialmente. El mismo argumento anterior se puede aplicar también a la cota dada por Rivara-Iribarren. Véase la Tabla 3 donde se ha aplicado este Teorema a los triángulos también estudiados por Rivara e Iribarren [37]. En la Tabla 3

se considera además el número de triángulos distintos que nos da la cota anterior (éstas se han señalado como "Cota R-I" y "Nueva cota" en la Tabla).

La próxima Subsección presenta una nueva cota, que es muy ajustada en todos los casos. Más aún, debido al cambio de punto de vista, como corolario podemos conocer *a priori* cuánto va a mejorar la malla por la aplicación de la partición 4T-LE. El corolario nos da también una cota inferior sobre el mayor de los ángulos menores de todos los triángulos generados mediante esta partición. De modo que esta segunda propiedad resalta los límites de la llamada propiedad de *auto-mejora* de la partición [37].

2.1 Nuevas cotas

Veamos primero una cota inferior en el número de triángulos distintos generados. La idea del siguiente lema será aplicada después para encontrar una cota superior.

Lema 2.1 *Sea N el número de triángulos distintos (en cuanto a semejanza) que aparecen en la aplicación reiterada de la partición 4T-LE a un triángulo inicial cualquiera t_1 y sus sucesores. Entonces N está acotado inferiormente como sigue:*

$$\left\lceil \frac{\cos(\beta_1)\mathrm{sen}(\gamma_1)}{\mathrm{sen}(\alpha_1)} \right\rceil \leq N \tag{7}$$

Prueba En primer lugar, considérese la Figura 10, donde se ha aplicado la partición 4T-LE al triángulo obtuso de vértices ABC.

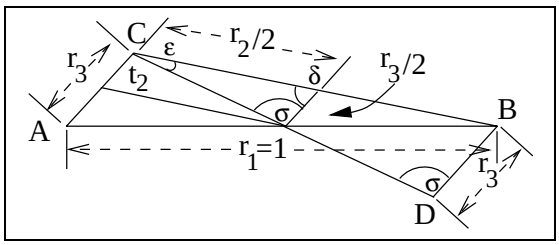


Figura 10: Triángulo original ΔABC, y nuevo triángulo no semejante ΔBCD

Obsérvese que el triángulo de vértices BCD es semejante al nuevo triángulo generado con ángulos ϵ, σ y δ. Además, si $\sigma > \delta$ (es decir $|CD| > r_2$) entonces, la partición 4T-LE aplicada sobre este nuevo triángulo produce otro nuevo triángulo no semejante. Si consideramos cada vez que aplicamos la partición, no el nuevo triángulo generado por ella, sino el triángulo semejante que tiene aristas *de doble tamaño* como se ha representado en la Figura 10, tenemos la situación que muestra la Figura 11.

En la Figura 11 el triángulo inicial ha sido normalizado para tener el lado mayor de longitud 1. En ese caso, el Teorema de los senos nos dice que la arista menor mide

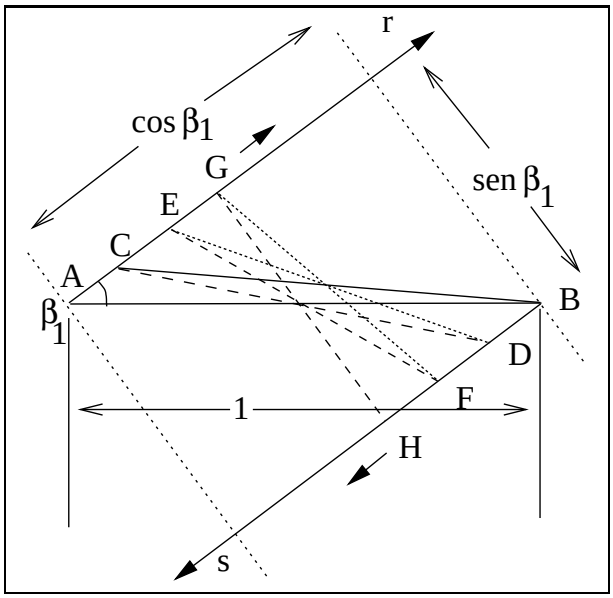


Figura 11: Sucesión de triángulos distintos generados por la partición 4T-LE. La longitud de la arista mayor del triángulo inicial se ha normalizado a 1

$|AC| = \frac{\text{sen}(\alpha_1)}{\text{sen}(\gamma_1)}$. La Figura 11 muestra los triángulos generados por la partición 4T-LE entre dos rectas paralelas (r y s), teniendo todos ellos la misma altura $h = \text{sen}(\beta_1)$, y el lado asociado a esa altura de igual longitud, es decir $|AC| = |BD| = |CE| = |DF| = |EG| = \ldots$. Todos los triángulos que aparecen de esta forma son obtusos mientras la altura h *cae fuera* del lado opuesto, y además el ángulo obtuso está siempre en el último punto generado, excepto quizá en el primer triángulo en el que la altura *cae* dentro del lado de igual longitud en todos ellos. En este caso, o bien el triángulo es agudo, o bien es obtuso en el penúltimo punto generado. En la figura la lista de triángulos así generados es: ΔABC (triángulo inicial), ΔBCD, ΔCDE, ΔDEF, etc., hasta el primer triángulo no obtuso ΔFGH.

Ahora el número de triángulos generados es al menos igual al número de veces que el segmento de longitud $\cos\beta_1$ (ver Figura 11) contiene al segmento AC, redondeado por arriba. Eso nos da la cota inferior del lema. □

Observación 2.2 *Puede ocurrir que el último triángulo generado por el proceso anterior sea obtusángulo en el penúltimo vértice generado. Tendríamos una situación como la representada en la Figura 12. Un estudio detallado de las dos situaciones nos proporcionará una cota superior en el número de triángulos generados.*

El lema anterior y la observación nos permiten dar un sencillo algoritmo para obtener una cota superior en el número de triángulos no semejantes generados por la partición 4T-LE que además *casi* coincide con el número exacto de triángulos generados.

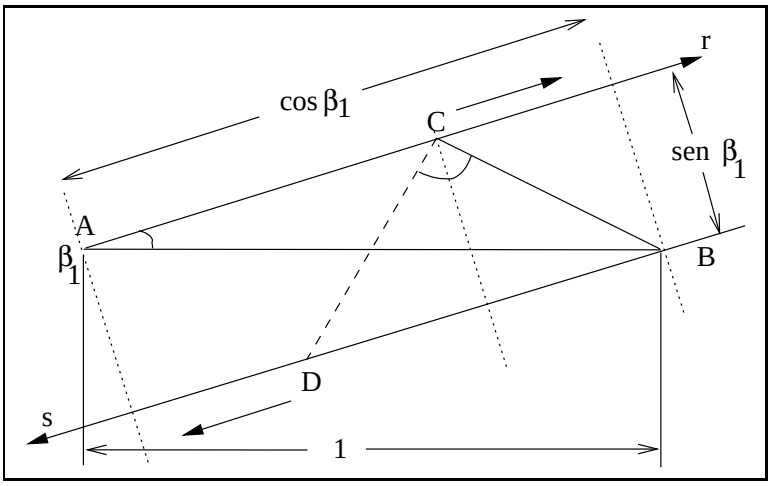


Figura 12: Sucesión de triángulos distintos. El último triángulo ΔBCD es obtuso en C

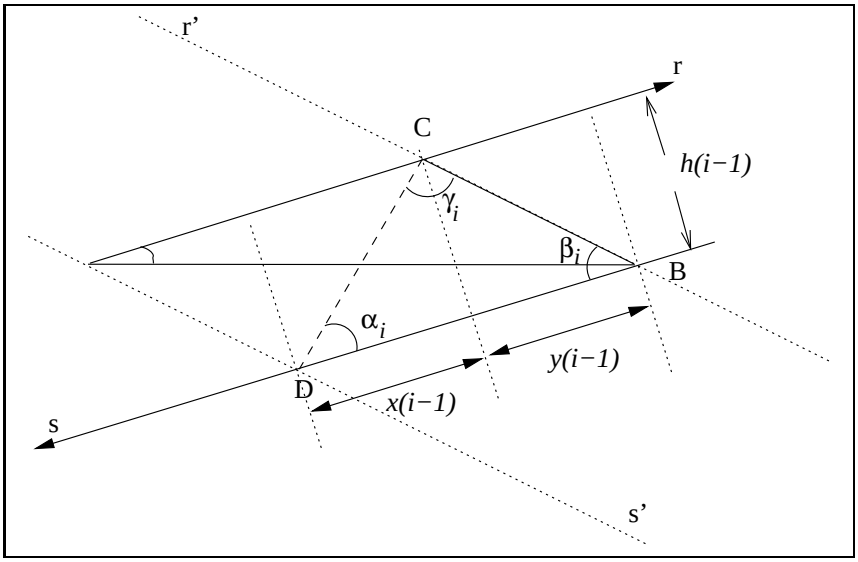


Figura 13: Nueva generación de triángulos si el último es obtuso en C

Teorema 2.3 *Sea N el número de triángulos distintos (en cuanto a semejanza) que pueden aparecer en la aplicación reiterada de la partición 4T-LE a un triángulo inicial cualquiera t_1 y sus sucesores. Entonces N está acotado superiormente por M, siendo M el número que proporciona el siguiente algoritmo:*

Algoritmo Cota Superior(t_1, M)
/* Variables de entrada: t_1, triángulo inicial
/* Variables de salida: cota superior en número de triángulos M
/* Sean los ángulos de t_1: $\alpha_1 < \beta_1 < \gamma_1$
/* *Inicialización variables:* $M = 1$; $i = 1$

Mientras $\gamma_i > \frac{\pi}{2}$ **hace**

$M = M + \lceil \phi(i) \rceil - 1$

$h(i) = \text{sen}(\beta_i)$

$x(i) = \max\{\lceil \phi(i) \rceil - \phi(i),\ \phi(i) - \lfloor \phi(i) \rfloor\}$

$y(i) = \min\{\lceil \phi(i) \rceil - \phi(i),\ \phi(i) - \lfloor \phi(i) \rfloor\}$

$x(i) = x(i)\frac{\text{sen}\alpha_i}{\text{sen}\gamma_i}$

$y(i) = y(i)\frac{\text{sen}\alpha_i}{\text{sen}\gamma_i}$

$i = i + 1$

/* *Calcula los ángulos del último triángulo*

$$\alpha_i = \text{arctg}\left(\frac{h(i-1)}{x(i-1)}\right)$$

$$\beta_i = \text{arctg}\left(\frac{h(i-1)}{y(i-1)}\right)$$

$\gamma_i = \pi - \alpha_i - \beta_i$

Fin del mientras

$M = M + 1$

Fin

donde,

$$\phi(i) = \frac{\cos(\beta_i)\text{sen}(\gamma_i)}{\text{sen}(\alpha_i)} \tag{8}$$

Prueba El algoritmo tiene en cuenta la posibilidad de que el último triángulo generado sobre la recta que contiene al lado menor inicial, o sobre su paralela por el vértice opuesto (rectas r y s en las Figuras 11 y 12) sea obtuso precisamente en el vértice opuesto, que es agudo en la Figura 11 pero obtuso en la Figura 12. En el segundo caso, éste último triángulo (ΔBCD de la Figura 12) hace el papel de triángulo inicial al que se aplica el mismo proceso. Véase en este sentido la Figura 13. Las listas de triángulos distintos generados se pueden escribir como sigue, donde a la derecha se va calculando el número de triángulos distintos según lo hace el algoritmo precedente. Nótese que el último triángulo de cada sub-lista es el primero de la sub-lista siguiente, lo que explica la fórmula $M = M - 1 + \lceil \phi(j) \rceil$, con $1 \leq j \leq k+1$:

$$\begin{array}{l|l}
\{\ \ t_1, t_2, \ldots, t_{\phi(1)} = t_1^1, & M = \lceil \phi(1) \rceil \\
\quad t_1^1, t_2^1, \ldots, t_{\phi(2)}^1 = t_1^2, & M = M - 1 + \lceil \phi(2) \rceil \\
\quad t_1^2, t_2^2, \ldots, t_{\phi(3)}^2 = t_1^3, & M = M - 1 + \lceil \phi(3) \rceil \\
\qquad\qquad \ldots & \qquad\qquad \ldots \\
\quad t_1^k, t_2^k, \ldots, t_{\phi(k+1)}^k\ \} & M = M - 1 + \lceil \phi(k+1) \rceil
\end{array}$$

Se tiene así un bucle que termina cuando el último de los triángulos generados $\left(t^k_{\phi(k+1)}\right)$ es no obtuso. Finalmente como la partición de un triángulo acutángulo por la partición 4T-LE produce *como mucho* un triángulo más se tiene la cota superior. □

Nótese que el procedimiento anterior nos da el número *casi-exacto* de los triángulos no semejantes generados por la partición partición 4T-LE al aplicarla a un triángulo inicial y sus sucesores, pues del lema y de este teorema se tiene que el número de triángulos generados N está acotado inferior y superiormente por $M-1 \leq N \leq M$. De donde para tener el número exacto de triángulos generados sólo debemos elegir entre dos números enteros consecutivos: $M-1$ ó M, siendo M la cota superior dada por el resultado anterior.

2.2 Número exacto de triángulos generados

Para tener el número exacto de triángulos basta delimitar cuándo la partición del último triángulo (*no obtuso*) generado produce un *nuevo* triángulo (obtuso), o bien un triángulo obtuso semejante a algún triángulo anterior. Para ésto es suficiente considerar la posición del ángulo mayor en el triángulo (*no obtuso*). Como el algoritmo *Cota Superior* calcula los tres ángulos del último triángulo, es suficiente estudiar la posición relativa del ángulo mayor respecto de la *línea de avance* de generación de los triángulos, según el siguiente resultado:

Teorema 2.4 *Sea t_1 un triángulo obtuso cualquiera y sea N el número exacto de triángulos no semejantes generados por la partición 4T-LE sobre el triángulo t_1. Sean $\alpha_i,\ \beta_i,\ \gamma_i$ los ángulos del primer triángulo no obtuso generado, según la notación del algoritmo anterior. Entonces N se puede calcular sustituyendo en el algoritmo anterior la línea $(M = M+1)$ tras el* **Fin del mientras** *como sigue:*

Algoritmo N(t_1, N)
/* Variables de entrada: t_1, triángulo inicial
/* Variables de salida: número exacto de triángulos N
/* Sean los ángulos de t_1: $\alpha_1 < \beta_1 < \gamma_1$
/* *Inicialización variables:* $M = 1$; $i = 1$
Mientras $\gamma_i > \frac{\pi}{2}$ **hace**
$M = M + \lceil \phi(i) \rceil - 1$
Calcula$(\alpha_i,\ \beta_i,\ \gamma_i)$
Fin del mientras
Si $\gamma_i \geq \beta_i$, **entonces**
Si $\gamma_i = \dfrac{\pi}{2}$, **entonces** $N = M$

En otro caso $N = M + 1$
Fin del si
En otro caso
$N = M + \delta$
Fin del si
Fin

donde δ *se define por:*

$$\delta = \begin{cases} 0 \quad si \quad \phi(i) - \lfloor \phi(i) \rfloor \leq 0.5 \\ \\ 1 \quad si \quad \phi(i) - \lfloor \phi(i) \rfloor > 0.5 \end{cases} \tag{9}$$

□

Se distinguen las posibles situaciones que pueden darse una vez que se ha obtenido el primer triángulo no obtuso, que son si la división del primer triángulo no obtuso produce un nuevo triángulo obtuso, o bien un triángulo (obtuso) semejante a alguno de los obtenidos anteriormente. Estas situaciones están representadas en la Figura 14. Allí el triángulo padre t_1 se supone que es obtuso, y el nuevo triángulo t_2 no obtuso. Nótese que en la Figura 14(a) no se generan más triángulos distintos, mientras que en la Figura 14(b) aparece un triángulo nuevo más, t_3.

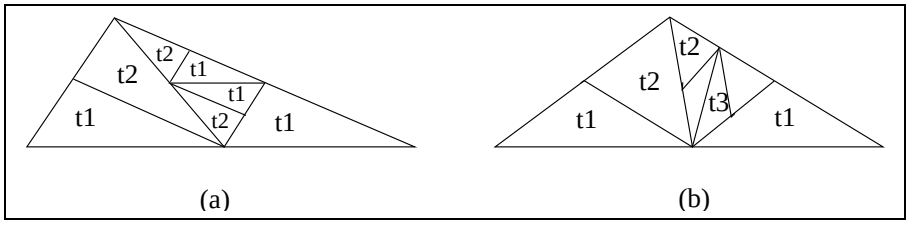


Figura 14: Dos situaciones distintas una vez que se ha obtenido un triángulo no obtuso t_2: (a) No se generan nuevos triángulos, (b) aparece un triángulo más

La diferencia entre los dos casos de la Figura 14 estriba en la longitud de las aristas del triángulo t_2 de la Figura. Si observamos las Figuras 11 y 8 esta cuestión equivale a cómo es la parte decimal de $\phi(1) = \dfrac{\cos(\beta_1)\text{sen}(\gamma_1)}{\text{sen}(\alpha_1)}$, según establece el teorema.

3 Resultados relativos a los ángulos menores

Corolario 3.1 *Sea* t_1 *un triángulo inicial, con ángulos* $\alpha_1 < \beta_1 < \dfrac{\pi}{2} < \gamma_1$. *Supongamos que se aplica repetidamente la partición 4T-LE sobre el triángulo* t_1 *y sus sucesores,*

obteniéndose la sucesión (finita) $\{t_1, t_2, \ldots, t_N\}$ *de triángulos distintos generados y sean* $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N\}$ *sus respectivos ángulos menores. Si denotamos por* α_{MAX} *el mayor de los ángulos menores generados por este proceso, entonces se tiene que:*

$$\alpha_{MAX} \leq 2\text{arctg}\left(\frac{\text{sen}(\alpha_1)}{2\text{sen}(\gamma_1)\text{sen}(\beta_1)}\right) \tag{10}$$

Prueba Considérese de nuevo la Figura 11. En ella se representan todos los nuevos triángulos no semejantes, excepto el triángulo obtuso que aparece de la división del último triángulo (no obtuso) ΔFGH. En la figura los triángulos tienen todos la misma área, y sus aristas menores la misma longitud. Entonces las dos posibilidades para la mejor y la peor situación en cuanto a los ángulos menores generados se pueden representar como se hace en las Figuras 15 y 16.

Sin embargo el resultado sobre la cota superior del ángulo mínimo mayor, es válido en general, pues α_{MAX} será en todo caso menor que el ángulo opuesto al lado al que se refiere el párrafo anterior. □

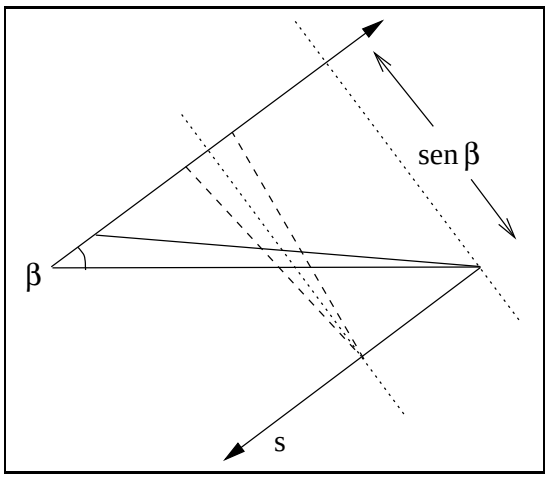


Figura 15: Situación del máximo ángulo menor

Corolario 3.2 *Sea* t_1 *un triángulo inicial en el que se aplica reiteradamente la partición 4T-LE. Sea* α_{MAX} *el mayor de los menores ángulos generados por ese proceso. Entonces si* $\dfrac{\text{sen}(\alpha_1)}{\text{sen}(\gamma_1)} \leq \text{sen}(\beta_1)$*, el ángulo* α_{MAX} *está acotado inferiormente por:*

$$\text{arctg}\left(\frac{\text{sen}(\alpha_1)}{\text{sen}(\gamma_1)\text{sen}(\beta_1)}\right) \leq \alpha_{MAX} \tag{11}$$

Prueba Las dos posibilidades distintas dependen de si se cumple o no la condición del corolario. En la hipótesis del corolario, si $\frac{\text{sen}(\alpha_1)}{\text{sen}(\gamma_1)} \leq \text{sen}(\beta_1)$, todos los triángulos generados, tras ser normalizados para tener todos la misma altura sobre la arista menor, como muestra la Figura 11, verifican que su altura sobre la arista menor es igual a $\text{sen}(\beta_1)$. Entonces el caso peor (es decir aquel con ángulo más pequeño) para el ángulo α_{MAX} es el que representa la Figura 16 lo que prueba el resultado.

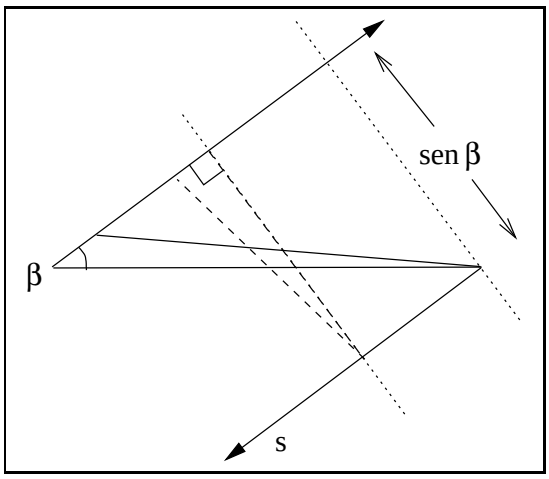


Figura 16: Situación del menor de los mayores ángulos menores

□

Nótese que el corolario anterior da una cota inferior para el valor máximo de los ángulos menores generados a través de la aplicación (global) de la partición 4T-LE a un triángulo inicial t_1 de manera que resulta una cota inferior sobre la condición del máximo del ángulo mínimo (*max-min angle condition*).

Estas dos últimas condiciones remarcan y delimitan cuánto puede mejorar una triangulación por la aplicación global de la partición en 4 triángulos por el lado mayor. Para una cota inferior del águlo menor generado α_{min} (*min-min condition*) tenemos la bien conocida fórmula: $\frac{\alpha_1}{2} \leq \alpha_{min}$ (ver por ejemplo [41]).

Ahora probaremos un resultado sobre el comportamiento del conjunto de los segundos ángulos mayores que se generan a partir de un triángulo obtuso inicial t_1.

Corolario 3.3 *Sea t_1 un triángulo obtuso inicial con ángulos α_1, β_1, y γ_1 tales que $\alpha_1 < \beta_1 < \frac{\pi}{2} < \gamma_1$. Supongamos que se aplica la partición 4T-LE sobre t_1 y sus sucesores produciendo una sucesión (finita) de triángulos no semejantes $\{t_i\}$, con ángulos α_i, β_i, y γ_i ($\alpha_i \leqslant \beta_i \leqslant \gamma_i$). Consideremos la sucesión de triángulos no semejantes $\{t_1, t_2, \ldots, t_N\}$ generados, donde t_N es el primer triángulo no obtuso. Entonces la respectiva sucesión de los segundos ángulos mayores $\{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_N\}$ es una sucesión creciente.*

Se debe notar aquí que este resultado también fue conjeturado por Rivara e Iribarren [37] de la observación experimental, aunque no reportaban prueba alguna.

Prueba Es suficiente considerar dos triángulos consecutivos como en la Figura 17.

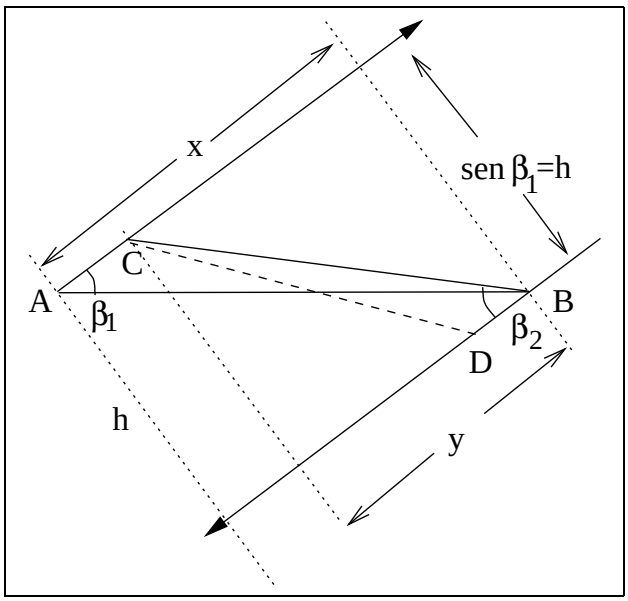


Figura 17: Evolución del segundo ángulo mayor

En la figura aparecen dos triángulos de vértices ABC y BCD. El triángulo ΔBCD ha sido obtenido por aplicación de la partición 4T-LE sobre el triángulo ΔABC. Los segundos ángulos mayores están denotados por β_1 y β_2 respectivamente en la figura. Ahora, como $\text{tg}(\beta_1) = \dfrac{h}{x}$ y $\text{tg}(\beta_2) = \dfrac{h}{y}$, y $y < x$ tenemos que $\text{tg}(\beta_1) < \text{tg}(\beta_2)$, y como $\beta_i < \dfrac{\pi}{2}$ resulta que $\beta_1 < \beta_2$. □

Corolario 3.4 *En las condiciones del corolario previo los segundos ángulos mayores* $\{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_N\}$ *están superiormente acotados por la expresión:*

$$\beta_i \leq \text{arctg}\left(\frac{\text{sen}(\beta_1)\text{sen}(\gamma_1)}{\text{sen}(\alpha_1)}\right) \tag{12}$$

Prueba Es suficiente de nuevo considerar la Figura 17 y los valores de $h = \text{sen}(\beta_1)$, y que

$$y \leq |BC| = \frac{\text{sen}(\alpha_1)}{\text{sen}(\gamma_1)} \tag{13}$$

así que,

$$\text{tg}(\beta_i) = \frac{h}{y} \leq \frac{\text{sen}(\beta_1)}{\left(\dfrac{\text{sen}(\alpha_1)}{\text{sen}(\gamma_1)}\right)}. \tag{14}$$

□

Nótese que la cota superior anterior de los segundos ángulos mayores generados es válida sólo mientras que los triángulos permanecen obtusos. Ver la Tabla 4 en el apartado de ejemplos numéricos. En esa tabla aparecen los valores del segundo ángulo mayor del triángulo inicial (β_1), del máximo de los segundos ángulos mayores de los triángulos obtusos generados (β_{MAX}), y por último los valores de la cota superior dada por el corolario anterio (U_{Bound}). Todos estos valores son relativos a los ejemplos de test también estudiados por Rivara e Iribarren [37].

4 Ejemplos numéricos

Presentamos aquí los ejemplos de test también estudiados por Rivara e Iribarren en [37] con el fin de comparar los resultados presentados por ellos con la nueva cota, la nueva cota ajustada y para mostrar empíricamente que se verifica la fórmula exacta sobre el número de triángulos generados presentada aquí.

La Tabla 1 presenta los seis triángulos de test y los ángulos de los triángulos no semejantes generados por la partición 4T-LE. Los triángulos distintos generados en estos ejemplos de test se han dibujado en las Figuras 18, 19 y 20. En ellas los triángulos se han normalizado para tener el lado mayor común, y para apreciar mejor la evolución de los distintos triángulos se han unido los vértices opuestos a la arista mayor con una poligonal que va desde el vértice opuesto a la arista mayor en el triángulo original hasta el vértice del último triángulo generado, por orden.

En la Tabla 2 se han añadido los valores de las cotas superiores del número de triángulos generados. En la tabla, *R-I* significa la cota presentada por Rivara-Iribarren, es decir la desigualdad (5). *Cota mejorada R-I* es la cota superior dada por la desigualdad (4), y *Cota casi-exacta* refiere a la cota superior dada por por el Teorema 2.3. Se debe notar de nuevo que en todos los casos la ecuación exacta del Teorema 2.4 nos da *a priori* el número exacto de triángulos distintos generados por la partición 4T-LE.

Por otro lado, la Tabla 3 muestra la evolución de las cotas estudiadas si se aplican teniendo en cuenta los triángulos ya generados en cada iteración. Lógicamente, a medida que los triángulos mejoran las cotas se van acercando al número exacto de triángulos que se generan.

La Tabla 4 muestra las cotas inferior y superior del mayor de los ángulos más pequeños generados en los mismos seis ejemplos de test. Nótese que en el triángulo número 2 no se cumple la acotación inferior del α_{MAX}, debido a que este triángulo no cumple la condición que exige el Corolario 3.2.

Finalmente, la Tabla 5 nos da para cada triángulo de test, el valor del segundo ángulo

mayor inicial (β_1), el valor máximo del segundo ángulo mayor generado mientras que los triángulos son obtusos (β_{MAX}) y el valor de la cota superior dada en este trabajo.

Tabla 1: Sucesiones de triángulos distintos obtenidos mediante la partición en 4 triángulos por el lado mayor

	Triángulo 1			Triángulo 2		
	# de triángulos distintos		15	# de triángulos distintos		11
It.	γ	β	α	γ	β	α
0	145.455	32.595	1.950	173.972	5.423	0.605
1	143.292	34.545	2.164	173.216	6.028	0.756
2	140.885	36.708	2.407	172.245	6.784	0.971
3	138.200	39.115	2.684	170.952	7.755	1.293
4	135.202	41.800	2.998	169.148	9.048	1.804
5	131.850	44.798	3.351	166.462	10.852	2.686
6	128.107	48.150	3.743	162.066	13.538	4.396
7	123.937	51.893	4.170	153.735	17.934	8.331
8	119.316	56.063	4.621	133.923	26.265	19.812
9	114.235	60.684	5.081	84.274	49.648	46.077
10	108.715	65.765	5.520	95.726	43.599	40.676
11	102.811	71.285	5.904	84.274	49.648	46.077
12	96.618	77.189	6.193			
13	90.266	83.382	6.352			
14	89.734	83.907	6.359			
15	90.266	83.382	6.352			

	Triángulo 3			Triángulo 4		
	# de triángulos distintos		8	# de triángulos distintos		4
It.	γ	β	α	γ	β	α
0	169.900	8.572	1.527	114.624	54.900	10.475
1	167.721	10.100	2.180	102.073	65.376	12.551
2	164.371	12.279	3.349	88.250	77.927	13.824
3	158.625	15.629	5.747	91.750	74.623	13.627
4	146.921	21.375	11.704	88.250	77.927	13.824
5	117.268	33.079	29.652			
6	63.237	62.732	54.031			
7	116.763	33.270	29.967			
8	63.237	62.732	54.031			

	Triángulo 5			Triángulo 6		
	# de triángulos distintos		3	# de triángulos distintos		2
It.	γ	β	α	γ	β	α
0	130.542	27.127	22.332	116.565	45.000	18.435
1	76.437	54.105	49.458	90.000	63.435	26.565
2	103.563	39.659	36.777	90.000	63.435	26.565
3	76.437	54.105	49.458			

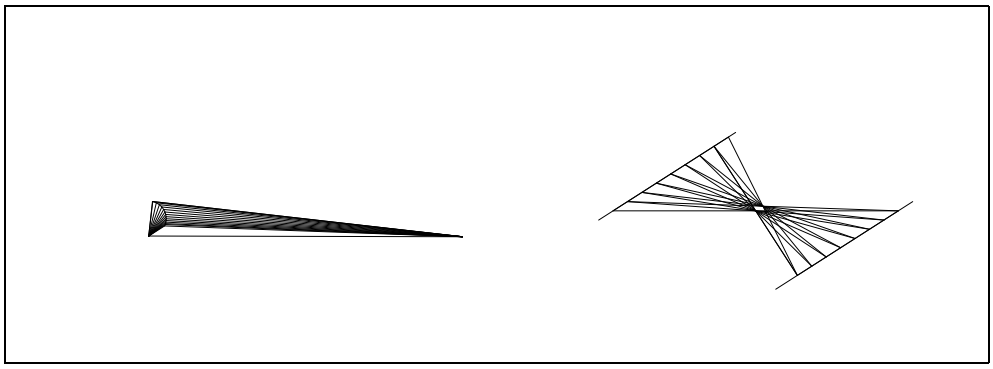
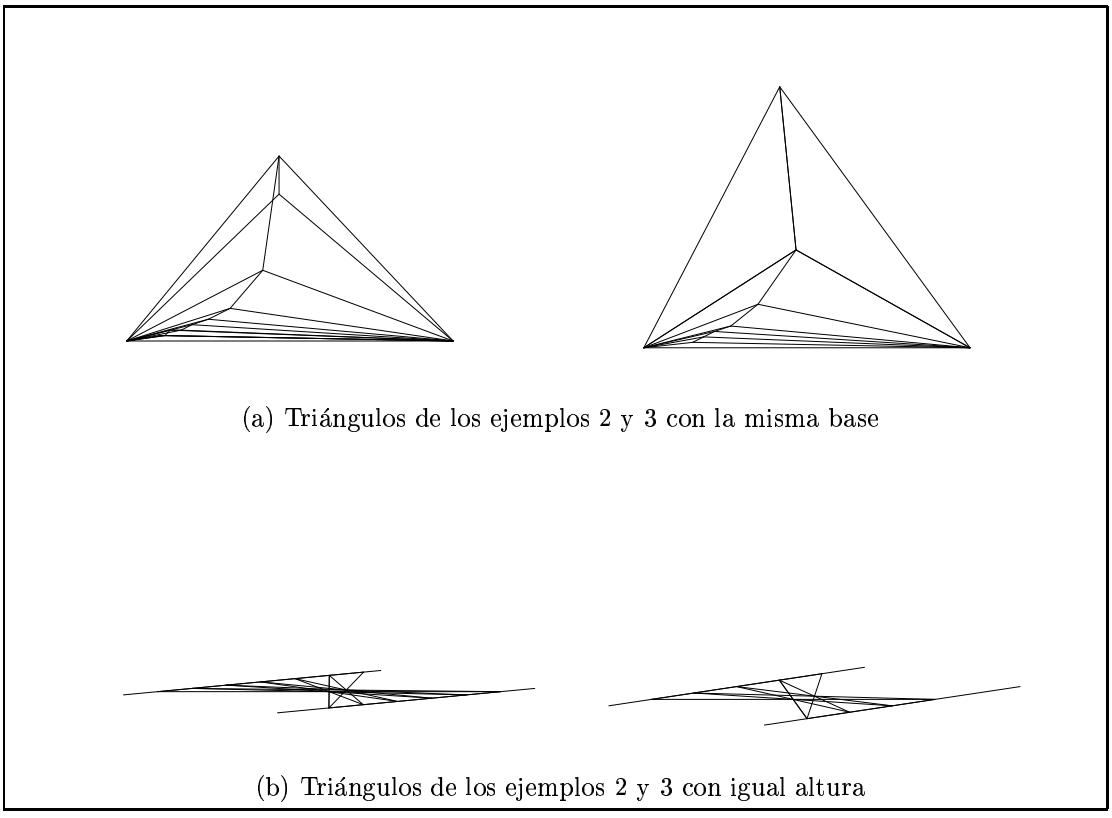


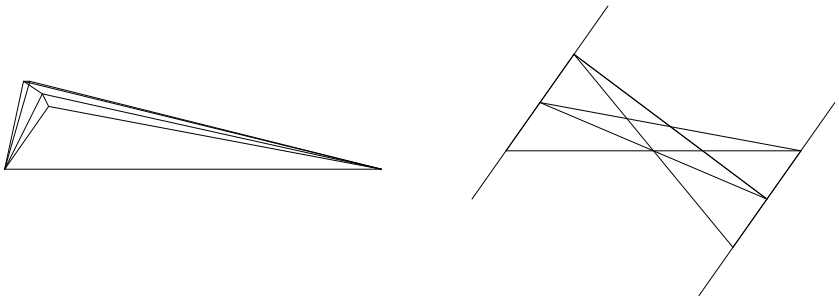
Figura 18: Evolución de los triángulos semejantes del ejemplo 1. Con igual lado mayor a la izquierda y con la misma altura a la derecha



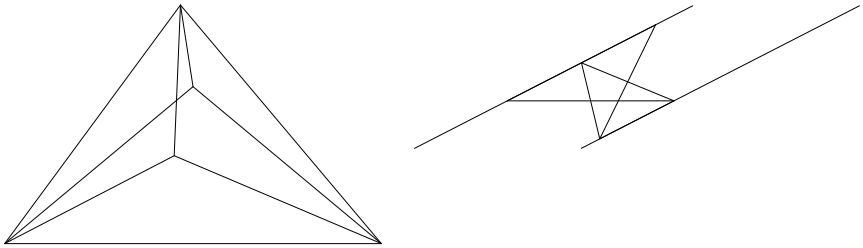
(a) Triángulos de los ejemplos 2 y 3 con la misma base

(b) Triángulos de los ejemplos 2 y 3 con igual altura

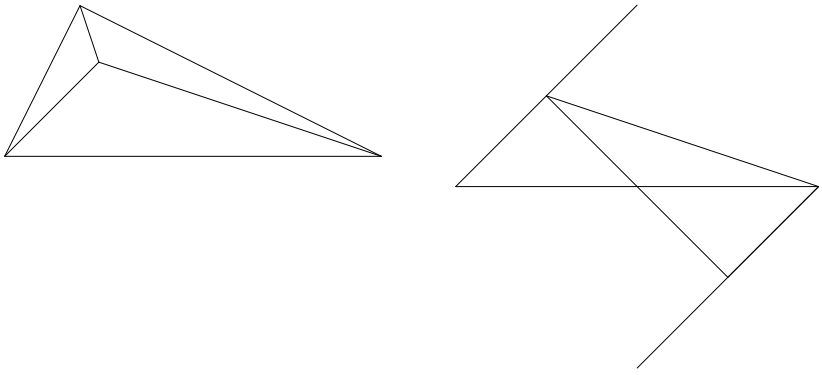
Figura 19: Evolución de los triángulos semejantes para los ejemplos 2 a 3



(a) Triángulos del ejemplo 4



(b) Triángulos del ejemplo 5



(c) Triángulos del ejemplo 6

Figura 20: Evolución de los triángulos semejantes para los ejemplos 4 a 6

Tabla 2: Valores de distintas cotas del número de triángulos obtenidos por la partición 4T-LE

Triángulo 1			Triángulo 2		
# de triángulos distintos		15	# de triángulos distintos		11
γ	β	α	γ	β	α
145.455	32.595	1.950	173.972	5.423	0.605
Previa cota R-I		45	Previa cota R-I		190
Cota mejorada R-I		30	Cota mejorada R-I		140
Cota casi-exacta		**16**	Cota casi-exacta		**11**

Triángulo 3			Triángulo 4		
# de triángulos distintos		8	# de triángulos distintos		4
γ	β	α	γ	β	α
169.900	8.572	1.527	114.624	54.900	10.475
Previa cota R-I		73	Previa cota R-I		7
Cota mejorada R-I		54	Cota mejorada R-I		4
Cota casi-exacta		**8**	Cota casi-exacta		**4**

Triángulo 5			Triángulo 6		
# de triángulos distintos		3	# de triángulos distintos		2
γ	β	α	γ	β	α
130.542	27.127	22.332	116.565	45.000	18.435
Previa cota R-I		5	Previa cota R-I		5
Cota mejorada R-I		3	Cota mejorada R-I		3
Cota casi-exacta		**3**	Cota casi-exacta		**3**

5 Conclusiones

En este trabajo se ha revisado el problema del cálculo del número de triángulos no semejantes generados por aplicación de la partición en 4 triángulos por el lado mayor. Aquí no sólo se ha mejorado una cota superior anterior sobre este número sino que se ha encontrado un procedimiento que proporciona el número exacto de triángulos generados.

Además se ha delimitado la llamada propiedad de *automejora* de los algoritmos basados en la bisección por el lado mayor: La calidad de los triángulos generados por estos algoritmos puede mejorar pero dentro de ciertos límites que han sido estudiados. Estas ideas pueden ser de utilidad para encontrar cotas inferiores sobre el ángulo mínimo que aparece al aplicar la partición 4T-LE, que mejorarían la clásica debida a Rosenberg y Stenger [41]. Generalizar estos análisis para la partición en 8 tetraedros por el lado mayor (8T-LE) [31, 39] explicaría la *propiedad de automejora*, también observada empíricamente en esa partición y en el algoritmo de refinamiento local basado en ella (el algoritmo 3D-SBR) [31, 32]. Sin embargo, el estudio del caso 3D parece bastante más complicado

Tabla 3: Cotas para el número de triángulos distintos obtenidos en las sucesiones de la Tabla 1

	Triángulo 1 # de triángulos distintos 15		Triángulo 2 # de triángulos distintos 11	
It.	Cota R-I	Nueva cota	Cota R-I	Nueva cota
0	45	30	190	140
1	41	27	152	113
2	37	25	119	88
3	34	22	90	67
4	31	21	66	49
5	28	19	46	35
6	26	18	31	24
7	24	17	20	16
8	22	16	13	12
9	21	15	13	12
10	20	15	13	12
11	20	15		
12	19	15		
13	19	15		
14	16	15		
15	16	15		
	Triángulo 3 # de triángulos distintos 8		Triángulo 4 # de triángulos distintos 4	
It.	R-I bound	New bound	R-I bound	New bound
0	73	54	7	4
1	52	38	5	4
2	35	26	5	4
3	22	16	5	4
4	13	10		
5	8	8		
6	8	8		
7	8	8		
8	8	8		
	Triángulo 5 # de triángulos distintos 3		Triángulo 6 # de triángulos distintos 2	
It.	Cota R-I	Nueva cota	Cota R-I	Nueva cota
0	5	3	5	3
1	3	3	4	3
2	3	3	4	3

que el realizado en dos dimensiones.

Tabla 4: Cotas inferior y superior del mayor de los menores ángulos generados

Triángulo 1			
α_1	L_{Bound}	α_{MAX}	U_{Bound}
1.950	6.356	6.359	6.376

Triángulo 2			
α_1	L_{Bound}	α_{MAX}	U_{Bound}
0.605	46.774	46.077	56.022

Triángulo 3			
α_1	L_{Bound}	α_{MAX}	U_{Bound}
1.527	45.553	54.031	54.032

Triángulo 4			
α_1	L_{Bound}	α_{MAX}	U_{Bound}
10.475	13.736	13.824	13.937

Triángulo 5			
α_1	L_{Bound}	α_{MAX}	U_{Bound}
22.332	47.638	49.458	57.472

Triángulo 6			
α_1	L_{Bound}	α_{MAX}	U_{Bound}
18.435	26.565	26.565	28.073

Tabla 5: Cota superior del segundo ángulo mayor generado

Triángulo 1			Triángulo 2		
β_1	β_{MAX}	U_{Bound}	β_1	β_{MAX}	U_{Bound}
32.595	77.189	83.644	5.423	26.265	43.226
Triángulo 3			Triángulo 4		
β_1	β_{MAX}	U_{Bound}	β_1	β_{MAX}	U_{Bound}
8.572	33.079	44.450	54.900	65.276	76.263
Triángulo 5			Triángulo 6		
β_1	β_{MAX}	U_{Bound}	β_1	β_{MAX}	U_{Bound}
27.127	27.127	42.362	45.000	63.435	63.435

Referencias

[1] D. N. Arnold, A. Mukherjee, and L. Pouly, *Locally adapted tetrahedral meshes using bisection*, SIAM J. Sci. Statist. Compt., 22, 2 (2000), pp. 431–448.

[2] I. Babuška, O. C. Zienkiewicz, J. Gago, and E. R. de A. Oliveira (eds), *Accuracy estimates and adaptive refinements in finite element computations*, John Willey & Sons, Chichester, 1986.

[3] I. Babuška, and A. Aziz, *On the angle condition in the finite element method*, SIAM J. Num. Anal., 13 (1976), pp. 214–226.

[4] E. Bänsch, *Local mesh refinement in 2 and 3 dimensions*, IMPACT Com. Sci. Eng., 3 (1991), pp. 181–191.

[5] R. E. Bank, A. H. Sherman, and A. Weiser, *Refinement algorithm and data structures for regular local mesh refinement*, in Scientific Computing, Amsterdam, 3–17, 1983.

[6] E. B. Becker, G. F. Carey, and J. T. Oden, *Finite elements*, Prentice-Hall, New York, 1981.

[7] M. Berger, *Geometry*, Springer-Verlag, New York, 1987.

[8] J. Bey, *Tetrahedral grid refinement*, Computing, 55, (1995), pp. 355–378.

[9] J. Bey, *Simplicial grid refinement: on Freudenthal's algorithm and the optimal number of congruence classes*, Numerische Mathematik, 85, 1 (2000), pp. 1–29.

[10] S. W. Bova, and G. F. Carey, *Mesh generation/refinement using fractal concepts and iterated function systems*, Int. J. Num. Meth. Eng., 33 (1992), pp. 287–302.

[11] G. F. Carey, *A mesh refinement scheme for Finite Elements computations*, J. Comput. Meth. Appl. Mech. Eng., 7, 1 (1976), pp. 93–105.

[12] P. Dierckx, S. van Leemput, and T. Vermeire, *Algorithms for surface fitting using Powell-Sabin splines*, IMA J. Numer. Anal., 12 (1992), pp. 287–305.

[13] H. Edelsbrunner, *Algorithms in Combinatorial Geometry*, Springer-Verlag, 1987.

[14] L. Ferragut, R. Montenegro, and A. Plaza, *Efficient refinement/derefinement algorithm of nested meshes to solve evolution problems*, Comm. Numer. Meth. Eng., 10 (1994), pp. 403–412.

[15] P.-L. George, *Automatic mesh generation*, J. Willey, 1991.

[16] W. Hackbush, *Multigrid methods and applications*, Springer-Verlag, Berlín, 1985.

[17] C. M. Hoffmann, *How to construct the skeleton of CSG objects*, in 4^{th} IMA Conference on Mathematics of Surfaces, Bath, England, 1990.

[18] B. Kearfott, *A proof of convergence and an error bound for the method of bisection in* $\mathbb{R}^n$, Math. Comp., 32 (1978), pp. 1147–1153.

[19] I. Kossaczký, *A recursive approach to local mesh refinement in two and three dimensions*, J. Comp. App. Math., 55 (1994) pp. 275–288.

[20] A. Liu, and B. Joe, *Quality local refinement of tetrahedral meshes based on bisection*, SIAM J. Sci. Stat. Comp., 16 (1995), pp. 1269–1291.

[21] J. M. Maubach, *Local bisection refinement for n-simplicial grids generated by reflection*, SIAM J. Sci. Statist. Compt., 16 (1995), pp. 210–227.

[22] W. F. Mitchell, *Optimal multilevel iterative methods for adaptive grids*, SIAM J. Sci. Stat. Comp., 13 (1992), pp. 146–167.

[23] A. Mukherjee, *An adaptive finite element code for elliptic boundary value problems in three dimensions with applications in numerical relativity*, Ph.D. Thesis, Pennsylvania State Univ., University Park, PA, 1996.

[24] J. R. Munkres, *Elementary differential topology*, Princeton Univ. Press, second edition, 1966.

[25] R. S. Muthukrishnan, P. S. Shiakolas, R. V. Nambiar, and K. L. Lawrence, *A simple algorithm for the adaptive refinement of three dimensional meshes*, AIAA Journal, 33, 5 (1995), pp. 928–932.

[26] R. V. Nambiar, R. S. Valera, K. L. Lawrence, R. B. Morgan, and D. Amil, *An algorithm for adaptive refinement of triangular meshes*, Int. J. Numer. Meth. Eng., 36 (1993), pp. 499–4509.

[27] J. O'Rourke, *Computational Geometry Column 23*, Int. J. of Comput. Geom. & Appl., 4, 2 (1994), pp. 239–242.

[28] M. A. Padrón, *Un algoritmo de desrefinamiento en dimensión tres para mallas encajadas de tetraedros basado en el esqueleto*, Tesis Doctoral, ULPGC, 1999.

[29] J. Penman, and M. D. Grieve, *Self-adaptive mesh generation technique for the finite element method*, in IEE Proceedings, 134, pp. 634–650, 1987.

[30] A. Plaza, *The fractal behaviour of triangular refined/derefined meshes*, Comm. Numer. Meth. Eng., 12 (5), (1996), pp. 295–302.

[31] A. Plaza, and G. F. Carey, *Refinement of simplicial grids based on the skeleton*, App. Num. Math., 32, 2 (2000) pp. 195–218.

[32] A. Plaza, M. A. Padrón, and G. F. Carey, *A 3D refinement/derefinement combination to solve evolution problems*, App. Num. Math., 32, 4 (2000), pp. 285–302.

[33] M. Price, C. Stops, and G. Butlin, *A medial object toolkit for meshing and other applications*, in 4^{th} Int. Mesh. Roundtable, pp. 233–240, 1995.

[34] M.-C. Rivara, *Design and data structure for fully adaptive, multigrid finite-element software*, ACM Trans. Math. Software, 10 (1984) pp. 242–264.

[35] M.-C. Rivara, *Mesh refinement based on the generalized bisection of simplices*, SIAM J. Numer. Anal., 21 (1984) pp. 604–613.

[36] M.-C. Rivara, *Selective refinement/derefinement algorithms for sequences of nested triangulations*, Int. J. Num. Meth. Eng., 28 (1989) pp. 2889–2906.

[37] M.-C. Rivara, and G. Iribarren, *The 4-triangles longest-side partition of triangles and linear refinement algorithms*, Math. Compt., 65, 216 (1996) pp. 1485–1502.

[38] M.-C. Rivara, and C. Levin, *A 3D refinement algorithm for adaptive and multigrid techniques*, Comm. Appl. Numer. Meth., 8 (1992), pp. 281–290.

[39] M.-C. Rivara, and A. Plaza, *Mesh refinement/derefinement based on the 8-tetrahedra longest-edge partition*, Dept. Computer Science, U. of Chile, TR/DCC-99-6, 1999.

[40] M.-C. Rivara, and M. Venere, *Cost analysis of the longest-side (triangle bisection) refinement algorithm for triangulations*, Eng. Comp., 12 (1996), pp. 224–234.

[41] I. Rosenberg, and F. Stenger, *A lower bound on the angles of triangles constructed by bisecting the longest side,* Math. of Comp. 29, (1975), pp. 390–395.

[42] J.-R. Sack, J. Urritia, *Handbook of Computational Geometry*, Elsevier Science, 2000.

[43] M. Stynes, *On faster convergence of the bisection method for all triangles*, Math. of Comp., 36 (1980), pp. 1195–1201.

[44] J. P. Suárez, *Estructuras de datos tipo grafo en los algoritmos de refinamiento y desrefinamiento basados en la bisección por el lado mayor. Aplicaciones*, Tesis Doctoral, ULPGC, 2001.

[45] J. P. Suárez, A. Plaza, and G. F. Carey, *The propagation problem in lontest-edge based refinement algorithms*, 01/02 IUMA Tech. Rep., (2002).

[46] G. M. Ziegler, *Lectures on Polytopes*, Springer-Verlag, Inc., New York, 1995.