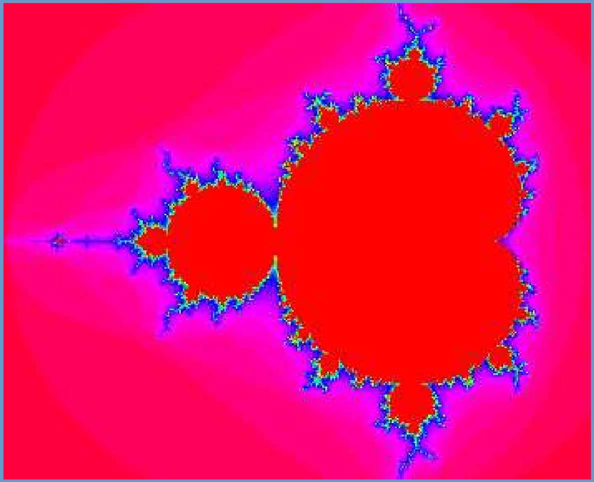
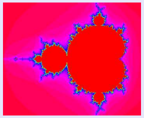
Cómo Resolver Problemas

Longitud y Área de Curvas Fractales

Pablo Montesdeoca Pérez



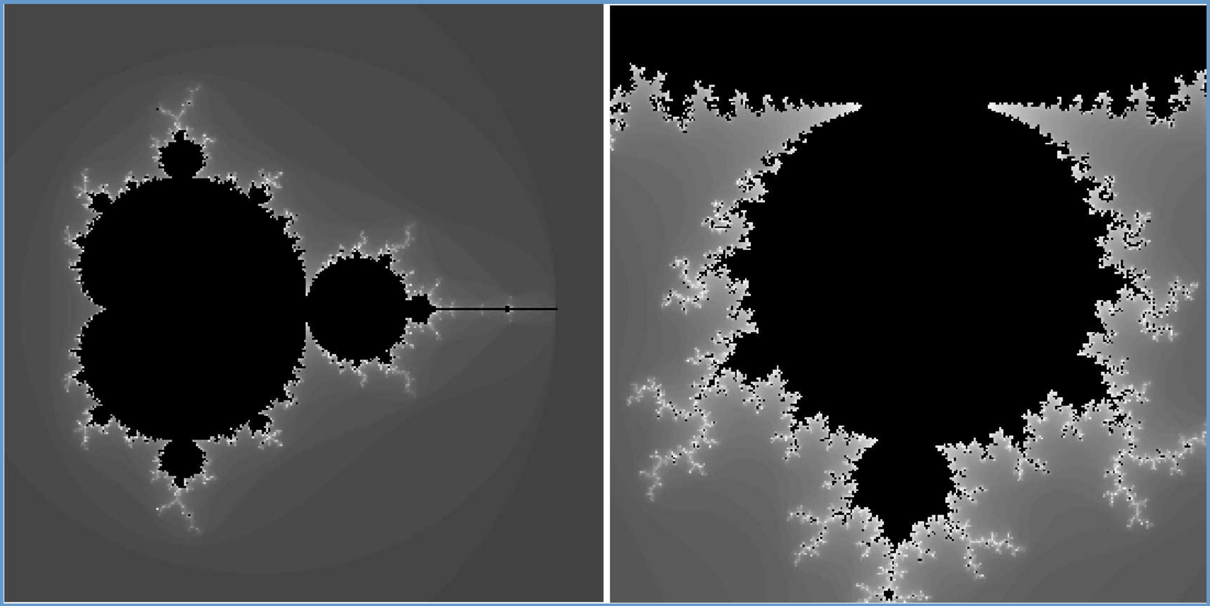


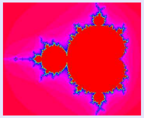
Los Fractales y sus Propiedades

De forma general, podemos caracterizar los fractales mediante las siguientes propiedades:

- Tienen una estructura compleja a cualquier resolución.
- Tienen una dimensión no entera.
- Tienen un perímetro de longitud infinita pero un área limitada.
- Son auto-similares e independientes de la escala.

Autosimilitud





Dimensión Fractal de un Conjunto

- Descomponer el conjunto en N réplicas de sí mismo
- Cada réplica reducida en un factor de escala r,
- Entonces $Nr^D = C$, donde C es constante.

$$D = \frac{\log N}{\log \frac{1}{r}} = \lim_{r \to 0} -\frac{\log N}{\log r}$$

El triángulo de Sierpiǹski

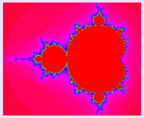
$$A_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n A_0 \text{ para } n = 0, 1, 2 \ldots$$

$$A_\infty = \lim_{n\to\infty} A_n = A_0 \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$$

$$P_n = 3^n \left(\frac{1}{2}\right)^n P_0 = P_0 \left(\frac{3}{2}\right)^n$$

$$P_\infty = \lim_{n\to\infty} P_n = P_0 \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n = \infty$$

$$D = \lim_{n\to\infty} -\frac{\log 3^n}{\log 2^{-n}} = \frac{\log 3}{\log 2} = 1{,}58496$$



Página www

Página de Abertura

Contenido

◀◀ ▶▶

◀ ▶

Página 7 de 15

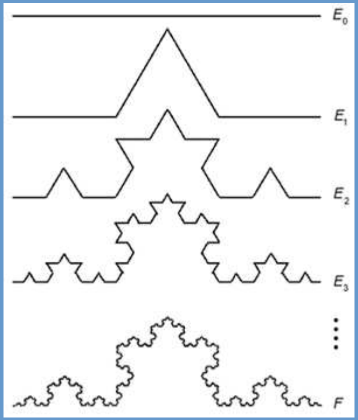
Regresar

Full Screen

Cerrar

Abandonar

La Curva de Koch



$$L_n = 4^n \left(\frac{1}{3}\right)^n L_0 = \left(\frac{4}{3}\right)^n L_0$$

$$L_\infty = L_0 \lim_{n\to\infty} \left(\frac{4}{3}\right)^n = \infty$$

Página www

Página de Abertura

Contenido

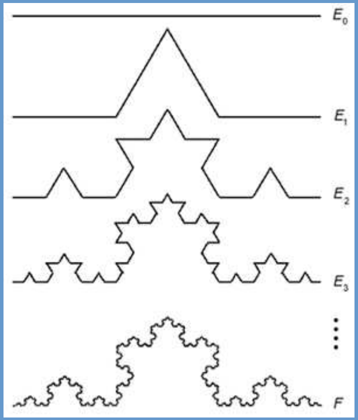
Página 8 de 15

Regresar

Full Screen

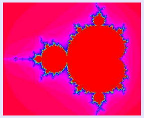
Cerrar

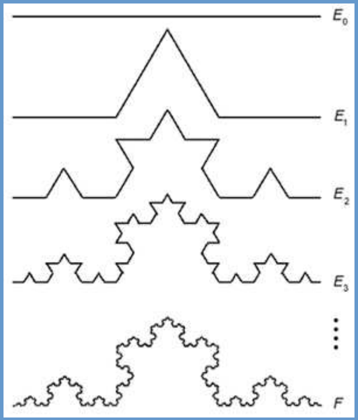
Abandonar



$$A_2 = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{l_0}{3}\right)^2 + 4\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{l_0}{3^2}\right)^2$$

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} 4^{k-1}\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{l_0}{3^k}\right)^2 \quad \text{para } n = 1, 2, \ldots.$$


Página www
Página de Abertura
Contenido
Página 9 de 15
Regresar
Full Screen
Cerrar
Abandonar



$$A_\infty = \lim_{n\to\infty} A_n = \frac{\sqrt{3}}{4^2} l_0^2 \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{4}{3^2}\right)^k = \frac{4}{3^2}\frac{\sqrt{3}}{4^2} l_0^2 \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{4}{3^2}\right)^k$$

$$A_\infty = \frac{4}{3^2}\frac{\sqrt{3}}{4^2} l_0^2 \frac{1}{1-\frac{4}{3^2}} = \frac{1}{5}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4} l_0^2$$

$$D = \lim_{n\to\infty} -\frac{\log 4^n}{\log 3^{-n}} = \frac{\log 4}{\log 3} = 1{,}26186$$

El Copo de Nieve de Koch

$$P_n = 3\left(\frac{4}{3}\right)^n L_0$$

$$P_\infty = \lim_{n\to\infty} 3\left(\frac{4}{3}\right)^n L_0 = \infty$$

Página www

Página de Abertura

Contenido

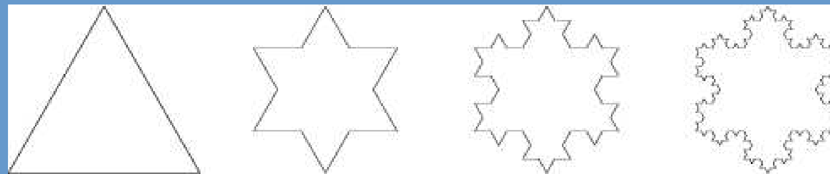
Página 11 de 15

Regresar

Full Screen

Cerrar

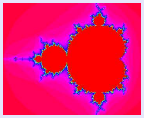
Abandonar



$$A_1 = \frac{\sqrt{3}}{4} l_0^2 + 3\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{l_0}{3}\right)^2$$

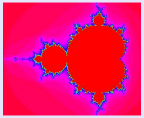
$$A_2 = \frac{\sqrt{3}}{4} l_0^2 + 3\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{l_0}{3}\right)^2 + 3\cdot 4\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{l_0}{3^2}\right)^2$$

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{\sqrt{3}}{4} l_0^2 + \sum_{k=1}^{n} 3\cdot 4^{k-1}\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{l_0}{3^k}\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} l_0^2\left[1 + \frac{3}{4}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{4}{3^2}\right)^k\right] = \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} l_0^2\left[1 + \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{4}{3^2}\right)^k\right] \end{aligned}$$



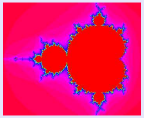
$$A_\infty = \frac{8}{5}\frac{\sqrt{3}}{4}l_0^2 = \frac{8}{5}A_0$$

$$D = \lim_{n\to\infty} -\frac{\log(3\cdot 4^n)}{\log 3^{-n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log 3 + n\log 4}{n\cdot\log 3} = \frac{\log 4}{\log 3} = 1{,}26186$$



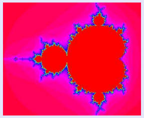
Aplicaciones de los Fractales

- Evolución de los mercados bursátiles.
- Estudio de la relación entre la Mecánica Cuántica y la Relatividad Especial.
- Análisis del nacimiento de los planetas
- Medición de fronteras y costas.
- Análisis y predicción de condiciones meteorológicas, terremotos y volcanes.
- Análisis espectroscópico.
- Análisis estructural y morfológico en polímeros.
- Caracterización de agregados.
- Análisis de fenómenos caóticos, como el movimiento *browniano* o la formación de nebulosas siderales.



Conclusiones

- Importancia de la aparición del concepto de geometría fractal.
- Existencia de propiedades fractales en la naturaleza.
- Descripción de fenómenos naturales muy complejos.
- Reformulación del concepto de dimensión.



Página www

Página de Abertura

Contenido

Página 15 de 15

Regresar

Full Screen

Cerrar

Abandonar

Referencias

[1] B. Mandelbrot, “How Long Is the Coast of Britain? Statistical Self-Similarity and Fractional Dimension” en *Science* vol. 156, pp. 636-638, 1967.

[2] L. F. Richardson, en *General Systems Yearbook* 6, 139, 1961.

[3] “Lewis Fry Richardson”. *Wikipedia, the free encyclopedia,* Jan. 2005. Wikipedia. 20 Jan. 2005 <http://en.wikipedia.org/wiki/Lewis_Fry_Richardson>

[4] H. Sagan, *Space-Filling Curves*, Springer-Verlag, NY, 1994.

[5] “Fractals”. *Mathworld* Jan. 2005. Wolfram. 22 Jan. 2005 <http://mathworld.wolfram.com/topics/Fractals.html>

[6] V. A. González, y C. Guerrero. *Fractales: Fundamentos y Aplicaciones. Parte I: Concepción Geométrica en la Ciencia y la Ingeniería* en <ingenierias.uanl.mx/10/pdf/ 10_Virgilio_Gonzalez_Fundamentos_y.pdf>