

Cómo Resolver Problemas

# Longitud y Área de Curvas Fractales. Dimensión Fractal

Pablo Montesdeoca Pérez

enero de 2005

## 1. Introducción

La publicación del artículo “*How Long Is the Coast of Britain? Statistical Self-Similarity and Fractional Dimension*”[1] en 1967 supuso un hito trascendental en el mundo científico, concretamente de las matemáticas, con una influencia que se ha extendido a todos los campos de la experiencia humana. En dicho artículo, el autor, Benoît Mandelbrot, introduce el concepto de geometría fractal.

Hasta ese momento, la geometría clásica se mostraba incapaz de describir objetos naturales rugosos o fragmentados, como el contorno accidentado del litoral. La aparición de la geometría fractal va a permitir el estudio de objetos fragmentados que presentan invarianza respecto al cambio de escala<sup>1</sup>. Desde ese momento, es posible describir matemáticamente objetos que hasta entonces se consideraban demasiado complejos, como nubes, la superficie de ciertos materiales y las señales funcionales de un electrocardiograma; o simplemente caóticos, como el movimiento *browniano*. Además, la geometría fractal ha favorecido el escalado de geometrías y propiedades desde niveles atómicos o desde dimensiones espaciales hasta las escalas macroscópicas en que nuestros sentidos son capaces de captar.

Resaltar por último la estrecha relación entre los fractales y la Teoría del Caos. La mejor prueba de esto es la constatación de que los fenómenos caóticos hacen aparecer, en el seno del desorden que generan, estructuras

---

<sup>1</sup>Es decir, al observar cualquier detalle del fractal, variando la escala, podemos reconocer una estructura similar a la forma global del objeto. El todo está en cada una de las partes.



Figura 1: Procedimiento de medida de la costa británica.

ordenadas de carácter fractal, repitiendo las mismas irregularidades a escalas inferiores. Es el caso, por ejemplo, de la difusión de un fluido en otro.

En la sección 2 de este trabajo se definirá el concepto de fractal y se enumerarán sus principales características. En la siguiente sección, nos centraremos en una de las propiedades más importantes de la geometría fractal: el estudio de la dimensionalidad. Después se explicará brevemente uno de los métodos de generación de fractales, llamado IFS (*Iterated Function System*). En la parte central de este documento nos centraremos en el análisis de tres fractales conocidos. Finalmente, en la sección 6 se comentarán algunas de los dominios donde se aplica la geometría fractal.

## 2. Fractales: Definición y Características

Antes del desarrollo de la geometría fractal, las propiedades de estos objetos ya habían sido puestas de manifiesto. Durante un estudio sobre líneas fronterizas [2], Lewis F. Richardson observó que la longitud de éstas aumenta en función del grado de precisión con el que se realiza la medida.

Como con cualquier curva, el procedimiento de medida de la frontera consiste en aproximar la curva por medio de un camino poligonal con lados de longitud  $\epsilon$ , como se muestra en la figura 1.

Al evaluar la longitud de la curva poligonal, haciendo que  $\epsilon \rightarrow 0$ , se espera

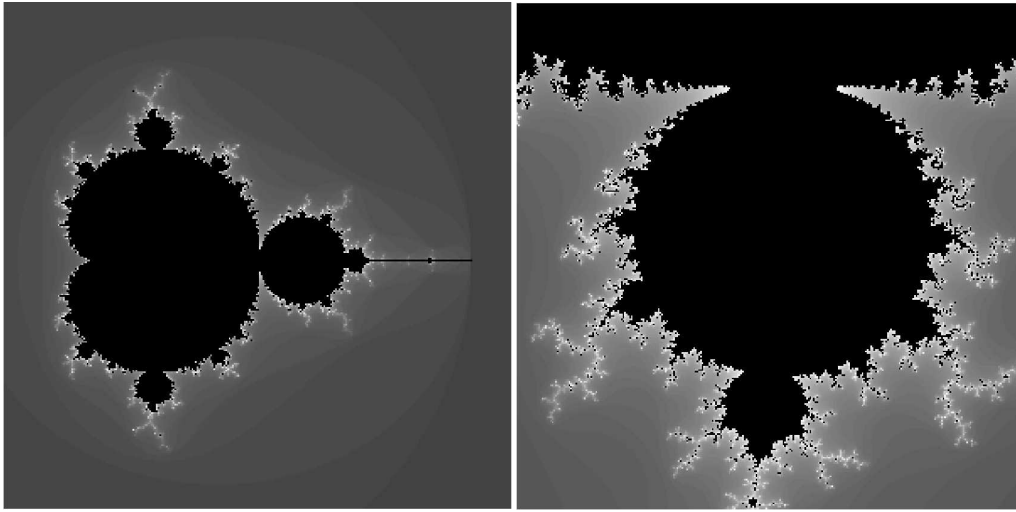


Figura 2: Representación gráfica del conjunto de Mandelbrot y detalle.

que la estimación de la longitud se aproxime a un límite. Sin embargo, una frontera o una línea de costa no es el tipo de curva estudiada normalmente en matemáticas. Aunque es una curva continua, no posee la “suavidad” necesaria para que pueda ser derivable. De hecho, a medida que aumentamos la resolución, surgen más entrantes y salientes, como bahías y cabos, por lo que la longitud a aproximar aumenta, y la longitud total a estimar parece aumentar sin límites  $L(\epsilon) \rightarrow \infty$ .

Los fractales son objetos matemáticos cuya principal peculiaridad es el ser *auto-similares*, es decir, que a cualquier escala se puede observar la misma estructura. Los fractales tienen, por lo tanto una cantidad infinita de detalle. A medida que aumentamos la resolución obtenemos más detalles, de la misma forma que sucede en el problema del cálculo de longitudes de líneas de costa.

En la figura 2 se muestra la representación gráfica del conjunto de Mandelbrot, descubierto por Mandelbrot en 1980. Éste genera una imagen curiosa, cuya popularización es responsable del desarrollo de la ciencia fractal. En ella se puede observar la propiedad de auto-similitud. Al observar un detalle se puede reconocer una estructura similar a la global.

En principio esta auto-similitud es infinita, pero sólo en el caso de los fractales matemáticos. Los fractales naturales sólo presentan un número finito de “niveles” auto-similares. Además, aunque parecidos no poseen una semejanza totalmente exacta. A esta propiedad de invarianza estadística del escalado se le denomina *auto-similitud estadística*.

Del principio de auto-similitud se desprende una consecuencia importante, ya intuida por L. F. Richardson: la imposibilidad de medir el contorno de un fractal matemático. Su área es finita y puede ser calculada, sin embargo su contorno es infinito.

De forma general, podemos caracterizar los fractales mediante las siguientes propiedades:

- Tienen una estructura compleja a cualquier resolución.
- Tienen una dimensión no entera.
- Tienen un perímetro de longitud infinita pero un área limitada.
- Son auto-similares e independientes de la escala.

### 3. Dimensión Fractal

En su estudio, L. F. Richardson descubrió que para cualquier línea de costa, existen unas constantes  $F$  y  $D$  tales que para aproximar la línea de costa con un camino poligonal, se requieren aproximadamente  $F\epsilon^{-D}$  intervalos de longitud  $\epsilon$ . De esta forma la longitud estimada vendrá dada por

$$L(\epsilon) \approx F\epsilon^{1-D}$$

Inspirado por los resultados obtenidos por Richardson, Mandelbrot concluyó que el valor de las medidas de objetos irregulares, como una línea de costa, dependen directamente de la escala utilizada para realizar la medida. Además, propuso utilizar el valor del exponente  $D$  como dimensión “natural” del espacio en el que se realiza la medida. Intentar medir la longitud unidimensional de un cuadrado da un resultado infinito, de la misma forma medir la línea de una costa en un espacio de dimensión errónea da un resultado así mismo no válido.

El valor  $D$  se denomina *dimensión Hausdorff-Besicovitch* del conjunto  $S$ . Para definir este concepto, se ha de considerar el número  $N_\delta$  de bolas de radio no mayor a  $\delta$  necesarias para cubrir  $S$  completamente. Es fácil comprobar que mientras más pequeño sea  $\delta$ , mayor es el valor de  $N_\delta$ . *Grosso Modo* se puede asegurar que si  $N_\delta$  aumenta de la misma forma que  $\frac{1}{\delta^D}$ , entonces  $D$  es la dimensión Hausdorff-Besicovitch del conjunto  $S$ .

Para medir una línea curva de longitud  $L_0$ , ésta se cubre con  $N_\delta$  segmentos de longitud  $\delta$ , por tanto  $N_\delta = L_0/\delta^1$ , y la longitud total estimada será:

$$\tilde{L} = \sum \delta^1 = N_\delta \cdot \delta^1 = \frac{L_0}{\delta^1} \delta^1$$

Al hacer que el segmento  $\delta$  tienda a cero obtenemos la longitud que queremos medir:

$$\tilde{L} = L_0 \delta^0 \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} L_0$$

De la misma forma para una superficie de dimensión  $A_0$  y midiendo ésta con  $N_\delta$  segmentos de área de dimensión  $\delta^2$  se tiene:

$$\tilde{A} = \sum \delta^2 = N_\delta \cdot \delta^2 = \frac{A_0}{\delta^2} \delta^2$$

$$\tilde{A} = A_0 \delta^0 \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} A_0$$

Igualmente, para el volumen:

$$\tilde{V} = \sum \delta^3 = N_\delta \cdot \delta^3 = \frac{V_0}{\delta^3} \delta^3$$

$$\tilde{V} = V_0 \delta^0 \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} V_0$$

Si quisiéramos medir la línea curva, tomando como regla un objeto de dimensión 2, estaríamos midiendo el área de la línea y por lo tanto.

$$\tilde{L} = \sum \delta^2 = N_\delta \cdot \delta^2 = \frac{L_0}{\delta^1} \delta^2$$

$$\tilde{L} = L_0 \delta^1 \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0 \tag{1}$$

Generalizando, al medir un objeto de determinada dimensión con una regla de dimensión mayor, encontraríamos un valor de magnitud cero. De la misma forma, sucede a la inversa: si midiésemos un objeto con una regla de dimensión menor, el valor de magnitud sería infinito. La dimensión de Hausdorff es el valor del exponente de  $\delta$  para el cual la estimación de la magnitud pasaría de 0 a infinito.

$$\tilde{A} = \sum \delta^2 = N_\delta \cdot \delta^1 = \frac{A_0}{\delta^2} \delta^1$$

$$\tilde{A} = A_0 \delta^{-1} \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \infty \quad (2)$$

Normalmente consideramos que los puntos tienen dimensión 0, las líneas 1, las superficies 2 y los volúmenes 3. A esta idea de dimensión se lo llama *dimensión topológica*. Por otro lado, una curva fractal que recorre una superficie puede ser tan irregular que casi llene la superficie en la que se encuentra. Podemos, entonces, pensar en la irregularidad como un incremento en la dimensión: una curva fractal tiene una dimensión entre 1 y 2, y una superficie fractal la tiene entre 2 y 3.

A partir de estos conceptos B. Mandelbrot da una definición más concreta de fractal:

*Un fractal es un conjunto cuya dimensión de Hausdorff-Besicovitch es mayor que su dimensión topológica.*

Sin embargo, esta definición es demasiado restrictiva, dado que excluye muchos fractales útiles en física.

La dimensión de Hausdorff-Besicovitch presenta el inconveniente de ser muy poco práctica a la hora de ser utilizada. Es por ello que habitualmente se recurre a otro concepto de dimensión: la *dimensión de similitud* o *dimensión fractal*, basada en la propiedad de auto-similitud de los fractales.

En general, si tomamos un conjunto de dimensión  $D$ , podemos descomponerlo en  $N$  réplicas de sí mismo reducidas en un factor de escala  $r$ , y tendríamos que  $Nr^D = C$ , donde  $C$  es constante. Resolviendo obtendríamos:

$$D = \frac{\log N}{\log \frac{1}{r}} = \lim_{r \rightarrow 0} - \frac{\log N}{\log r}$$

Así se define la dimensión fractal de la siguiente manera:

*Sea  $N(A, \epsilon)$  el mínimo número mínimo de bolas abiertas de radio  $\epsilon$  necesarias para cubrir el conjunto  $A$ , la dimensión de similitud  $D$  es:*

$$D = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(A, \epsilon)}{\log \frac{1}{\epsilon}} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} - \frac{\log N(A, \epsilon)}{\log \epsilon} \quad (3)$$

Si denominamos  $d_{\text{top}}$  a la dimensión topológica,  $d_H$  a la dimensión de Hausdorff y  $d_{\text{sim}}$  a la dimensión de similitud, entonces  $d_{\text{top}} \leq d_H \leq d_{\text{sim}}$

## 4. Generación de Fractales: *Iterated Function System*

Un fractal auto-similar se obtiene aplicando un número determinado de transformaciones similares<sup>2</sup> a un conjunto compacto no vacío, y repitiendo infinitas veces el proceso sobre la unión del objeto original y el resultado de la iteración precedente. La secuencia de conjuntos generados converge en cierto sentido a un único conjunto compacto no vacío. A éste conjunto límite se le denomina *conjunto atractor invariante* y es independiente de la elección del conjunto inicial.

Al conjunto de transformaciones similares se le denomina IFS (*Iterated Function System*)

## 5. Ejemplos: Análisis de Algunos Fractales

Posteriormente al trabajo de Mandelbrot sobre la longitud de la costa británica, se promovieron discusiones similares sobre otras figuras matemáticas, algunas de las cuales, como el copo de nieve de Koch, eran conocidas desde finales del siglo XIX y principios del XX. Dichas figuras eran consideradas “formas patológicas” y carecían de interés real para el mundo científico.

### 5.1. El triángulo de Sierpiński

Se trata de un fractal descrito por Waclaw Sierpiński en 1915, que ya había aparecido en el arte italiano en el siglo XIII.

Para generar la figura partimos de un triángulo sólido cualquiera, en nuestro caso equilátero. Éste se divide en cuatro triángulos iguales más pequeños, utilizando para ello el punto medio de cada lado como nuevo vértice. Finalmente eliminamos el triángulo que queda en el medio. Este proceso se repite en cada uno de los triángulos restantes.

---

<sup>2</sup>Aquellas que al aplicarse al objeto dan, como resultado, un objeto similar.

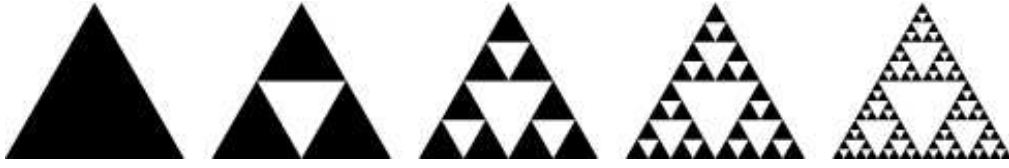


Figura 3: Generación del triángulo de Sierpiński.

El triángulo de Sierpiński es el conjunto de puntos que permanecen después de reiterar este proceso infinitas veces.

Como cada triángulo genera tres nuevos triángulos, el número de triángulos después de la  $n$ -ésima iteración es  $N_n = 3^n$ . Siendo  $A_0$  el área del triángulo original, en la primera iteración eliminamos  $1/4$  del área de éste, quedando  $A_1 = 3A_0/4$ . En la siguiente iteración eliminamos 3 triángulos, cada uno con un área igual a  $1/4$  del área del triángulo del que fue tomado. Por lo tanto, el área total que eliminamos en esta iteración es  $3 \cdot 1/4 \cdot A_0/4 = 3A_0/16$ . Esto implica que en la segunda iteración el área total restante es:

$$A_2 = \frac{3A_0}{4} - \frac{3A_0}{16} = \frac{9A_0}{16} = \left(\frac{3}{4}\right)^2 A_0$$

Si realizamos una iteración más, tendremos igualmente que:

$$A_3 = \frac{9A_0}{16} - 9 \frac{1}{4} \frac{1}{4} \frac{A_0}{4} = \frac{27A_0}{64} = \left(\frac{3}{4}\right)^3 A_0$$

Por inducción supondremos, no sin antes verificarlo, que el área final tendrá la forma

$$A_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n A_0 \text{ para } n = 0, 1, 2, \dots \quad (4)$$

Así sabemos que para la iteración  $k + 1$ , tenemos que eliminar  $3^k$  triángulos, cada uno de área  $(A_0/4)^{k+1}$ . Según nuestra hipótesis, el área de nuestro triángulo después de  $k + 1$  iteraciones será:

$$A_{k+1} = A_k - 3^k \frac{A_0}{4^{k+1}} = \frac{3^k}{4^k} A_0 - \frac{3^k}{4^{k+1}} A_0 = \frac{4 \cdot 3^k - 3^k}{4^{k+1}} A_0 = \left(\frac{3}{4}\right)^{k+1} A_0$$



Con lo que nuestra hipótesis queda confirmada. Fácilmente se observa que a medida que  $n$  aumenta hacia infinito, el área tiende a 0.

$$A_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A_0 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0 \quad (5)$$

Para calcular el perímetro de los triángulos que restan después de cada iteración consideraremos que el perímetro de cada uno de éstos es la mitad que el de la iteración precedente. Esto se desprende directamente del procedimiento de construcción del fractal. Así, siendo  $P_0$  el perímetro original, después de la primera iteración nos quedan 3 triángulos cada uno con un perímetro de valor  $P_0/2$ . En la segunda iteración, tendremos  $3^2$  triángulos con perímetros de valor  $P_1/2 = P_0/4$ . Para  $n$  iteraciones tendremos:

$$P_n = 3^n \left(\frac{1}{2}\right)^n P_0 = P_0 \left(\frac{3}{2}\right)^n \quad (6)$$

Es inmediato observar que cuando el número de iteraciones  $n$  se aproxima a infinito, el perímetro de los triángulos tiende a infinito.

$$P_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n = P_0 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n = \infty \quad (7)$$

Resulta sorprendente que una curva infinita pueda encerrar un área nula. A partir de los resultados obtenidos en las ecuaciones 1 y 2 se puede concluir que el triángulo de Sierpiński debe tener una dimensión entre 1 y 2. Para verificarlo utilizaremos la ecuación 3.

Como ya se ha dicho, en la  $n$ -ésima iteración tendremos  $N_n = 3$  réplicas del triángulo, cada una de ellas reducidas en un factor  $r = (1/2)^n$ . Por lo tanto:

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{\log 3^n}{\log 2^{-n}} = \frac{\log 3}{\log 2} = 1,58496 \quad (8)$$

## 5.2. La curva de Koch

La curva de Koch es uno de las primeras curvas fractales en ser descrita. Apareció en un artículo del matemático sueco Helge von Koch en 1906. Más conocida que ésta es el copo de nieve de Koch, similar a la curva excepto que comienza a partir de un triángulo en lugar de un segmento.

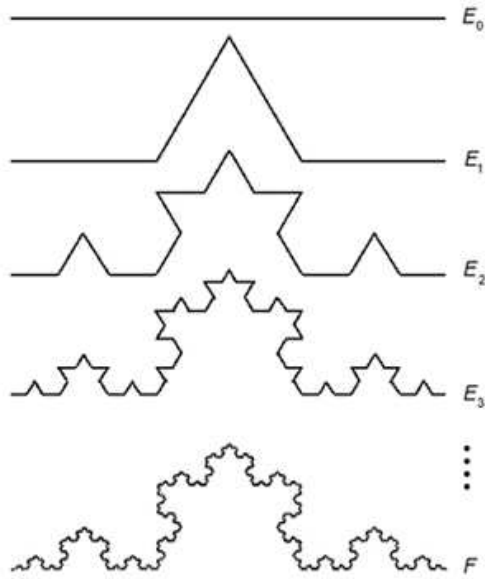


Figura 4: Generación de la curva de Koch.

La construcción de la curva de Koch se lleva a cabo mediante adiciones progresivas a un simple segmento de línea. Las adiciones se realizan dividiendo ésta en nuevos segmentos de un tercio de longitud, y luego sustituyendo el segmento central por dos segmentos que, junto con el suprimido, formarán un triángulo equilátero. La curva de Koch es el resultado de repetir este procedimiento sobre los segmentos resultantes infinitas veces.

La curva de Koch tiene longitud infinita, ya que cada en cada iteración del proceso de generación, la longitud de cada segmento aumenta un tercio de su longitud original. Esto es evidente, ya que el segmento central es remplazado por dos nuevos segmentos de la misma longitud, resultando cuatro nuevo segmentos de longitud un tercio del segmento original. El número de segmentos en la  $n$ -ésima iteración es  $N_n = 4^n$ .

Así, si llamamos  $L_0$  a la longitud inicial del segmento, después de la primera iteración tendremos una curva de longitud  $L_1 = 4L_0/3$  formada por 4 segmentos (cada uno de longitud  $L_0/3$ ). En la segunda iteración, tendremos  $4^2$  segmentos, cada uno con una longitud  $1/3 \cdot L_0/3 = L_0/3^2$ . Una nueva iteración dará como resultado  $4^3$  segmentos de  $1/3 \cdot L_0/3^2 = L_0/3^3$ .

Generalizando, para cualquier  $n$ :

$$L_n = 4^n \left(\frac{1}{3}\right)^n L_0 = \left(\frac{4}{3}\right)^n L_0 \quad (9)$$

que tiende a infinito a medida que el número de iteraciones se aproxima al infinito:

$$L_\infty = L_0 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{3}\right)^n = \infty \quad (10)$$

A partir de los resultados obtenidos anteriormente se puede determinar el área “bajo” la curva de Koch. Para ello hay que tener en cuenta que el área de un triángulo equilátero viene dado por  $A = \frac{\sqrt{3}}{4} l^2$ , donde  $l$  representa la longitud de los lados. Así, en la primera iteración tendremos un triángulo equilátero cuyo área es  $A_1 = \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{l_0}{3}\right)^2$ . En la segunda iteración, tendremos que añadir a este triángulo otros 4 triángulos de área  $\frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{l_0}{3^2}\right)^2$ . Por lo tanto:

$$A_2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{l_0}{3}\right)^2 + 4 \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{l_0}{3^2}\right)^2$$

Puesto que en la iteración  $k$ -ésima existen  $4^k$  segmentos, en la iteración  $k + 1$  se añade el mismo número de triángulos. Por otro lado, el tamaño de los segmentos se divide por 3 en cada iteración, por lo tanto:

$$A_n = \sum_{k=1}^n 4^{k-1} \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{l_0}{3^k}\right)^2 \quad \text{para } n = 1, 2, \dots \quad (11)$$

el resultado de esta serie cuando el número de iteraciones se aproxima a infinito es el área que se busca:

$$A_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \frac{\sqrt{3}}{4^2} l_0^2 \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{4}{3^2}\right)^k = \frac{4}{3^2} \frac{\sqrt{3}}{4^2} l_0^2 \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{4}{3^2}\right)^k$$

que es una serie geométrica de razón en  $(0,1)$ , por lo que es convergente, y por lo tanto la curva encierra un área finita.

$$A_\infty = \frac{4}{3^2} \frac{\sqrt{3}}{4^2} l_0^2 \frac{1}{1 - \frac{4}{3^2}} = \frac{1}{5} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} l_0^2 \quad (12)$$

Se observa que el área encerrada por la curva es una quinta parte del área que encerraría un triángulo equilátero de lado  $l_0$ .

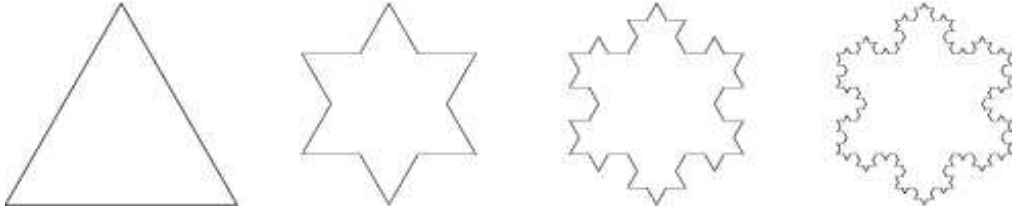


Figura 5: Generación del copo de nieve de Koch.

Para calcular la dimensión fractal de esta figura, tenemos en cuenta que el número de segmentos en cada iteración es  $N_n = 4^n$ , y la longitud de cada segmento se reduce en un factor de un tercio cada vez, esto es  $l_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$ . La dimensión fractal será entonces:

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} - \frac{\log 4^n}{\log 3^{-n}} = \frac{\log 4}{\log 3} = 1,26186 \quad (13)$$

### 5.3. El copo de nieve de Koch

Como ya se ha indicado, el copo de nieve de Koch está muy relacionado con la curva de Koch. El procedimiento de generación de ambos es muy similar. En el caso del copo de nieve se comienza con un triángulo equilátero, cuyos lados son divididos en segmentos de un tercio de su longitud. El segmento central se sustituye con un triángulo equilátero de lado igual a los segmentos y se elimina la base. Para generar el copo se repite infinitas veces este proceso sobre los nuevos segmentos generados en la anterior iteración.

Se observa que este proceso es equivalente a generar una curva de Koch utilizando como segmento inicial los lados del triángulo.

Así, el perímetro será igual al de la curva de Koch multiplicado por tres, y tenderá a infinito a medida que aumenta el número de iteraciones.

$$P_n = 3 \left(\frac{4}{3}\right)^n L_0 \quad (14)$$

$$P_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} 3 \left(\frac{4}{3}\right)^n L_0 = \infty \quad (15)$$

Para el cálculo del área sabemos que partimos de un triángulo equilátero cuyo área es  $A_0 = \frac{\sqrt{3}}{4}l_0^2$ , siendo  $l_0$  la longitud de los lados. En la primera

iteración, tendremos que añadir a este triángulo otros 3 triángulos de área  $\frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{l_0}{3}\right)^2$ . Por lo tanto:

$$A_1 = \frac{\sqrt{3}}{4} l_0^2 + 3 \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{l_0}{3}\right)^2$$

Recordando que después de cada iteración, cada segmento genera 4 nuevos segmentos, y que la longitud de estos se reduce en un factor de 1/3:

$$A_2 = \frac{\sqrt{3}}{4} l_0^2 + 3 \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{l_0}{3}\right)^2 + 3 \cdot 4 \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{l_0}{3^2}\right)^2$$

Generalizando para  $n$  iteraciones:

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{\sqrt{3}}{4} l_0^2 + \sum_{k=1}^n 3 \cdot 4^{k-1} \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{l_0}{3^k}\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} l_0^2 \left[ 1 + \frac{3}{4} \sum_{k=1}^n \left(\frac{4}{3^2}\right)^k \right] = \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} l_0^2 \left[ 1 + \frac{1}{3} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{4}{3^2}\right)^k \right] \end{aligned} \quad (16)$$

que al igual que en el caso de la curva de Koch, da lugar a un área finita e igual a:

$$A_\infty = \frac{8}{5} \frac{\sqrt{3}}{4} l_0^2 = \frac{8}{5} A_0 \quad (17)$$

Otra forma de calcular este área consiste en calcular la superficie del triángulo original y después sumar el área de las 3 curvas de Koch que se generan en los lados.

Para finalizar con esta serie de ejemplos, calcularemos la dimensión fractal de esta figura. Como sabemos, el número de réplicas del triángulo original es  $N_n = 3 \cdot 4^n$ , y la longitud de cada segmento se reduce en un factor de un tercio cada vez, esto es  $l_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$ . La dimensión fractal será entonces:

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} - \frac{\log(3 \cdot 4^n)}{\log 3^{-n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log 3 + n \log 4}{n \cdot \log 3} = \frac{\log 4}{\log 3} = 1,26186 \quad (18)$$

que coincide con la dimensión de la curva de Koch. Esto no debe sorprendernos, ya que el proceso de generación de ambos fractales es idénticos, dando lugar a figuras de complejidad similar.

## 6. Aplicaciones de los Fractales

Ciertos objetos naturales poseen un número finito de grados de autosimilitud, y pueden ser considerados como fractales naturales. Bajo esta premisa, la geometría fractal ha ayudado enormemente a explicar diversos fenómenos naturales tales como el curso de los ríos, la formación de nubes, el crecimiento de las plantas, las cordilleras, la evolución de las galaxias, el crecimiento poblacional, el funcionamiento de los huracanes, el ruido electrónico y los atractores caóticos. Todos estos fenómenos comparten un principio unificador: sus patrones generales se repiten a diferentes escalas dentro del mismo objeto.

Los fractales poseen además aplicaciones tecnológicas. El diseño de antenas ha sido siempre un tema complejo. La solución tradicional de utilizar conductores largos y de pequeña sección está siendo reemplazada por *arrays* de antenas. Éstos consisten en miles de pequeñas antenas que son situadas o bien de forma aleatoria o bien según un patrón regular. Los fractales proporcionan la combinación perfecta entre aleatoriedad y orden, con el menor número de componentes.

Otra aplicación tecnológica es la compresión de imágenes. El concepto básico detrás de la compresión fractal de imágenes es tomar una imagen y expresarla como un IFS, dando como resultado una descripción bastante compacta del fractal. La imagen puede ser rápidamente regenerada a cualquier grado de resolución con infinitos niveles de detalle fractal. El mayor problema detrás de esta idea es encontrar el IFS que describa la imagen (*Problema Inverso*).

Otras aplicaciones importantes de los fractales son:

- Evolución de los mercados bursátiles.
- Estudio de la relación entre la Mecánica Cuántica y la Relatividad Especial.
- Análisis del nacimiento de los planetas
- Medición de fronteras y costas.
- Análisis y predicción de condiciones meteorológicas, terremotos y volcanes.
- Análisis espectroscópico.
- Análisis estructural y morfológico en polímeros.

- Caracterización de agregados.
- Análisis de fenómenos caóticos, como el movimiento *browniano* o la formación de nebulosas siderales.

## 7. Conclusión

En este estudio se ha puesto de manifiesto la importancia de la aparición del concepto de geometría fractal. Los objetos fractales han dejado de ser una simple curiosidad matemática, para formar parte de una de las teorías más revolucionarias en las matemáticas del siglo pasado: la Teoría del Caos.

Así, la ciencia fractal va a permitir la descripción de prácticamente todos los fenómenos naturales, por muy complejos que sean, ya que éstos suelen poseer algunas de las propiedades fractales.

Otra consecuencia importante del desarrollo de la geometría fractal es la reformulación del concepto de dimensión, necesario para obtener valores de magnitud dútiles.

## Referencias

- [1] B. Mandelbrot, "How Long Is the Coast of Britain? Statistical Self-Similarity and Fractional Dimension" en *Science* vol. 156, pp. 636-638, 1967. 1
- [2] L. F. Richardson, en *General Systems Yearbook* 6, 139, 1961. 2
- [3] "Lewis Fry Richardson". *Wikipedia, the free encyclopedia*, Jan. 2005. Wikipedia. 20 Jan. 2005 <[http://en.wikipedia.org/wiki/Lewis\\_Fry\\_Richardson](http://en.wikipedia.org/wiki/Lewis_Fry_Richardson)>
- [4] H. Sagan, *Space-Filling Curves*, Springer-Verlag, NY, 1994.
- [5] "Fractals". *Mathworld* Jan. 2005. Wolfram. 22 Jan. 2005 <<http://mathworld.wolfram.com/topics/Fractals.html>>
- [6] V. A. González, y C. Guerrero. *Fractales: Fundamentos y Aplicaciones. Parte I: Concepción Geométrica en la Ciencia y la Ingeniería* en <[ingenierias.uanl.mx/10/pdf/10\\_Virgilio\\_Gonzalez\\_Fundamentos\\_y.pdf](http://ingenierias.uanl.mx/10/pdf/10_Virgilio_Gonzalez_Fundamentos_y.pdf)>