π

GERARDO MEDINA PÉREZ

¿CÓMO RESOLVER PROBLEMAS?

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS DE TELECOMUNICACIÓN

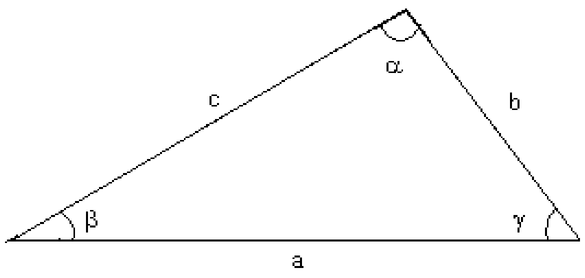
TERCER CURSO

ÍNDICE

CONOCIMIENTOS PREVIOS:

- **TEOREMA DEL COSENO:**

Supongamos un triángulo cualquiera, de lados a, b y c, tal como indica la Figura



Lo que dice el teorema es que conocidos dos lados de un triángulo cualquiera, el cuadrado del lado que desconocemos es la suma de los cuadrados de los otros dos lados menos el doble producto de dichos lados por el coseno del ángulo opuesto al lado desconocido; es decir:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$
$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\chi$

Esta expresión es la correspondiente al TEOREMA DEL CONSENO, y sirve para calcular cualquier lado de cualquier triángulo conocido dos lados y un ángulo. Es una extensión del TEOREMA DE PITÁGORAS, solo que éste tiene un ángulo de 90º, cuyo coseno es 0. Es decir, la fórmula para el triángulo anterior pero suponiendo c = 90º es

$c^2 = a^2 + b^2$

(El TEOREMA DEL COSENO se usará en la demostración de ELOY CONCHILLO).

- **TRIÁNGULOS SEMEJANTES:**

Dos triángulos son equivalentes si cumplen entre sí estos 3 criterios básicos:

I. Primer criterio

Dos triángulos que tienen los tres ángulos iguales son semejantes entre sí.

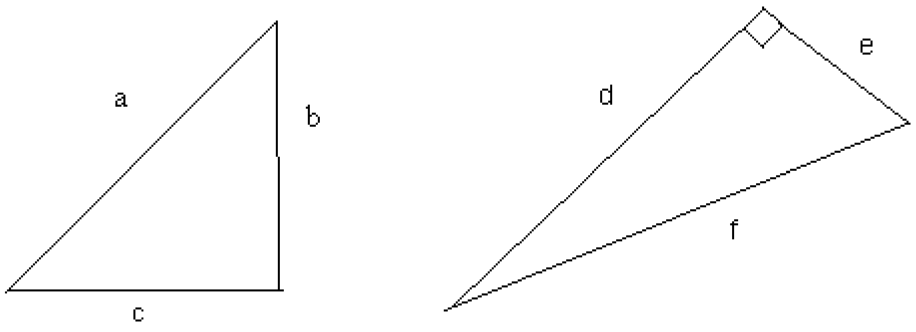
II. Segundo criterio

Dos triángulos que tienen los tres lados proporcionales son semejantes entre sí.

III. Tercer criterio

Dos triángulos que tienen dos lados proporcionales y el ángulo comprendido entre ellos es igual, son semejantes entre sí.

En general, dos triángulos son semejantes si sus ángulos son, respectivamente, iguales y sus lados homólogos son proporcionales.



Con lados homólogos se entiende a aquellos entre los cuales existe el mismo ángulo. Basta simplemente con girar el triángulo de la derecha hasta que tenga la posición del de la izquierda, tal que a y f (hipotenusas) son homólogos entre sí, como también lo es d con b y e con c.

Suponiendo que se cumplen los 3 criterios anteriores, la proporcionalidad es:

$$e/c = d/b = f/a = c, \text{ con } c \text{ constante.}$$

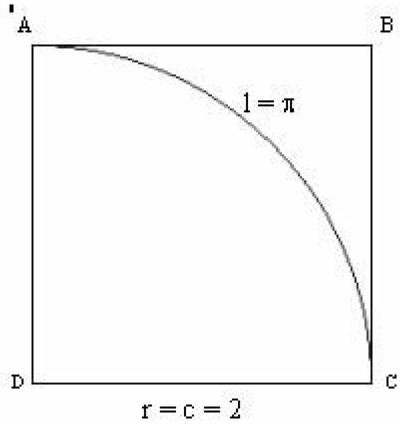
Es decir, se dividen entre sí los lados homólogos, siendo la proporción constante.

DEMOSTRACIONES DEL VALOR DE π

En el siguiente apartado se presentan paso a paso dos demostraciones diferentes del número π, puntualizando sus ventajas e inconvenientes:

- **DEMOSTRACIÓN DE ELOY CONCHILLO:**

Supongamos un arco de circunferencia de radio 2, tal como se indica en la Figura 1.1:



(Figura 1.1)

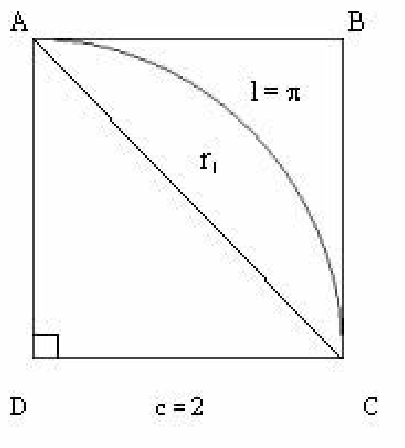
Llamemos al arco de circunferencia "L". De esta manera, sabemos que el arco formado por la cuarta parte de la circunferencia ,mide exactamente π, ya que:

$L = 2\pi r$

$L / 4 = l = (2 \cdot \pi \cdot 2) / 4$;

$\mathbf{L = \pi}$

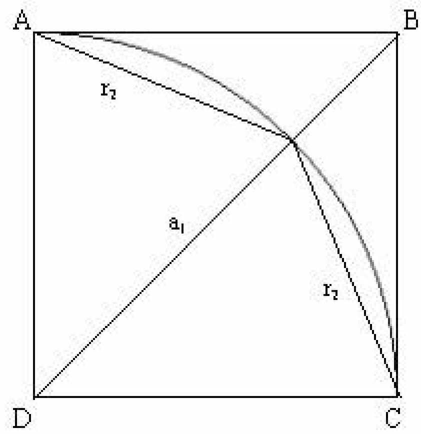
Ahora unimos los vértices A y C del cuadrado anterior, llamando r_1 a la recta que une ambos vértices, de manera que queda, según el Teorema de Pitágoras, lo representado en la Figura 1.2:



$$r_1 = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2} \approx 2'8284 \ldots$$

(Figura 1.2)

Ahora partimos el cuadrado por la mitad; es decir, unimos los vértices B y D. Como hicimos con r_1, r_2 será ahora la recta que une A y C con el corte entre la circunferencia y la recta DB, quedando lo representado en la Figura 1.3:



(Figura 1.3)

Como se ve en la Figura 1.3 quedan dos rectas r_2 exactamente iguales (dado que la partición que hace la recta BD es simétrica), por lo que calculando una r_2 la recta total será $2 \cdot r_2$. Nótese además que el ángulo que forma DC con DB (ó a_1 en el dibujo) es de 45º.

Para calcular r_2 simplemente habrá que usar el **TEOREMA DEL COSENO**, cuya explicación se encuentra detallada en el capítulo **CONOCIMIENTOS PREVIOS**. Con todos estos datos, y usando dicho teorema, tenemos

$$r_2 = \sqrt{2^2 + 2^2 - 2 \cdot 2 \cdot 2 \cos 45^\circ} = 2\sqrt{2 - 2\cos 45^\circ} \approx 1{,}5307\ldots$$

pero como hemos dicho anteriormente, ahora tenemos dos segmentos en lugar de uno, de modo que:

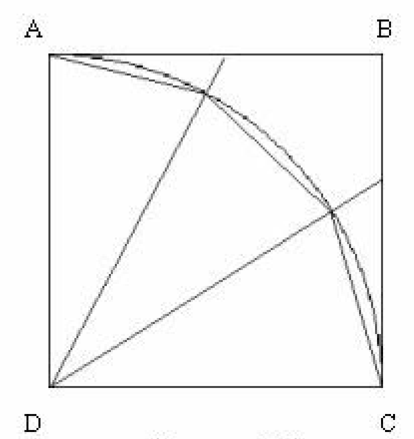
$$2r_2 = 2(2\sqrt{2 - 2\cos 45^\circ}) \approx 3{,}0614\ldots$$

Una vez llegados a este punto es conveniente notar 3 observaciones:

1. Cuando partimos el cuadrado de lado 2 en dos partes (2 particiones) el ángulo que forman DC y DB es de 90º/2.
2. Con 2 particiones quedan dos rectas r_2, siendo la recta total $2r_2$.
3. El valor de $2r_2$ se acerca más al valor de π que r1 (1 partición, 90º/1).

Lo que se comenta en 3 es lógico, ya que como se ha visto en las dos figuras anteriores (1.1 y 1.2) a medida que aumentamos las particiones nos acercamos más a la longitud del arco de circunferencia. Haremos una partición más para comprobar que se acerca el valor de la recta al valor de π.

Con 3 particiones queda lo representado en la Figura 1.3.



(Figura 1.4)

donde hemos usado la misma notación anterior. Como se aprecia hemos partido en 3 partes iguales, tal que cada ángulo es de 30º y cada recta es r3, tal que la recta total es **$3r_3$**. Así, el valor de r_3, por el TEOREMA DEL COSENO es:

$$r_3 = \sqrt{2^2 + 2^2 - 2\cdot 2\cdot 2\cos 30^\circ} = 2\sqrt{2 - 2\cos 30^\circ} \approx 1{,}0352\ldots$$

y sabiendo que tenemos 3 segmentos r_3 resulta:

$$3r_3 = 3\sqrt{2^2 + 2^2 - 2\cdot 2\cdot 2\cos 30^\circ} = 3(2\sqrt{2 - 2\cos 30^\circ}) \approx 3{,}1058\ldots$$

Como era de esperar, este valor se acerca más a la longitud del arco que $2r_2$. Es decir, nos acercaremos más al valor de π si hacemos infinitas particiones.

En el caso de r_3, como apuntaban las observaciones 1 y 2, los ángulos son de 90º/3 y tenemos 3 rectas r3 para esas 3 particiones. Supongamos ahora que tenemos n particiones. En este caso, por las analogía con las observaciones 1, 2 y 3, tendremos n rectas r_n, de modo que el total es nr_n, siendo el ángulo entre esas rectas d 90º/n.

Usando como antes el TEOREMA DEL COSENO, y expresándolo de la misma manera que en r_1, r_2 y r_3, el valor de esas rectas es de

$$r_n = \sqrt{2^2 + 2^2 - 2 \cdot 2 \cdot 2\cos\left(\frac{90^\circ}{n}\right)} = 2\sqrt{2 - 2\cos\left(\frac{90^\circ}{n}\right)}$$

de modo que la recta total vale

$$\pi(n) = 2n\sqrt{2 - 2\cos\left(\frac{90^\circ}{n}\right)}$$

Ahora bien, sabemos que a más rectas (más particiones) nos acercaremos más al valor de π, de modo que para infinitas rectas dará:

$$\pi = \lim_{n\to\infty}\left(2n\sqrt{2 - 2\cos\left(\frac{90^\circ}{n}\right)}\right)$$

Podemos hallar otra fórmula muy parecida, a partir del mismo procedimiento, pero en lugar de hacer divisiones siguiendo los números naturales (1, 2, 3,...) hacerlas siguiendo las potencias de 2, es decir, (1, 2, 4, 8......). La fórmula queda así:

$$\pi(n) = 2^{n+1}\sqrt{2 - 2\cos\left(\frac{90^\circ}{2^n}\right)}$$

Por lo tanto:

$$\pi = \lim_{n\to\infty}\left(2^{n+1}\sqrt{2 - 2\cos\left(\frac{90^\circ}{2^n}\right)}\right)$$

Pero del mismo modo que hacemos particiones naturales o potenciales, podemos hacerlas por n! o potencias de n en n (n^n),… todo destinado a aumentar la rapidez del algoritmo.

Sin embargo, la fórmula tiene un defecto: estamos usando el valor en grados de π/2 (90º) para calcular el valor del propio número. Es decir, calculamos de cierta manera el número a partir del propio número. 90º= π/2 rad y por lo tanto, es incoherente usar π para hallar π.

No obstante este valor en grados sólo aparece en el coseno, así que la solución pasaría por encontrar el valor de ese coseno sin usar 90º.

- **DEMOSTRACIÓN DE FERNANDO VALDÉS:**

El planteamiento de esta demostración es similar al de la anterior, con la salvedad de que en este caso partiremos de una circunferencia de radio 1 inscrita en un cuadrado de lado 2, tal y como se ve en la figura 1.5:

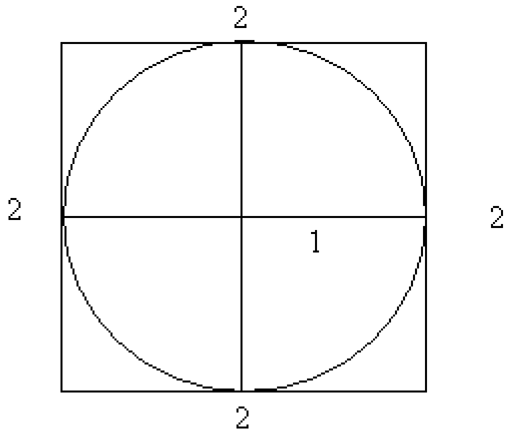


FIGURA 1.5

Dado que el cuadrado tiene lado 2 su área será 4, y puesto que el círculo tiene radio 1 su área será π. Es decir, para calcular el valor de π sólo tendremos que quitar al área del cuadrado (4) el área sobrante que se encuentra entre la circunferencia y el cuadrado. Esto se ilustra en la Figura 1.6, donde se ha seleccionado lo que ocurre en el primer cuadrante, siendo el resultado global lo que ocurra en ese cuadrante por 4:

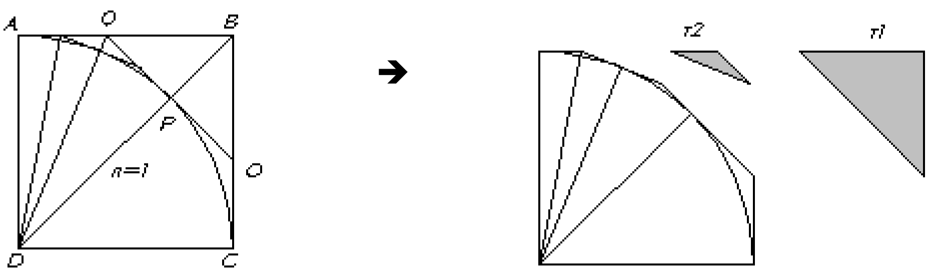


FIGURA 1.6

En la figura se han recortado los triángulos T1 y T2.

Como se ve en la figura, una manera de eliminar esa área sobrante es mediante triángulos, de modo que las áreas que debemos calcular serán las de triángulos sucesivos. Para infinitos triángulos estaremos en los bordes de la circunferencia.

Sabido esto el problema es cómo calcular las áreas de esos triángulos. Para ello nos guiaremos de la siguiente figura (FIGURA 1.7):

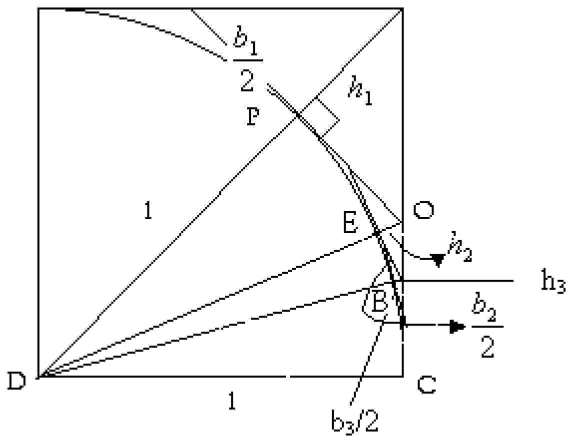


FIGURA 1.7

Empecemos calculando la altura h_1 de T1 y su base. Se aprecia en la figura que T1 tiene los catetos iguales, por lo que

$h_1 = \frac{b_1}{2}$ (1) (analizando POA)

Además, analizando el triángulo DCA (rectángulo) tenemos que $h_1 = \sqrt{2} - 1$

Analicemos ahora los triángulos DPO y DOC, usando la semibase de T2 ($b_2/2$) y su altura (h2). En DPO tenemos $(h_2 + 1)^2 = \left(\frac{b_1}{2}\right)^2 + 1$, de donde despejando h_2 resulta

$h_2 = \sqrt{1 + h_1^2} - 1$ (2). Además, podemos establecer una relación entre alturas y bases de T1 y T2. Para dicha relación haremos uso de la semejanza de triángulos.

Según los criterios de semejanza vistos en el apartado de **CONOCIMIENTOS PREVIOS,** los triángulos T2 y DPO son semejantes, siendo su relación de semejanza:

$h_2 = \frac{b_1 b_2}{4} = h_1\left(\frac{b_2}{2}\right)$ (4) , obteniendo así la relación que buscábamos.

Por su lado, entre T3 y DBE hay también semejanza, y si tenemos en cuenta que b_3 es la base de T3 y su altura es h_3 (como indica la figura1.7), por semejanza tenemos:

$$h_3 = b_3 b_2/4 = h_2(b_3/2), \text{ si } h_2 = b_2/2$$

Ahora bien, en DBC tenemos la expresión

$$h_3 = \sqrt{1 + \left(\frac{h_2}{h_1}\right)^2} - 1 \quad (3)$$

Llegados aquí es conveniente echar una vista atrás para ver que existe una relación entre (2) y (3). Dicha relación mirando ambas expresiones es

$$h_n = \sqrt{1 + \left(\frac{h_{n-1} h_{n-3} h_{n-5} \cdots}{h_{n-2} h_{n-4} h_{n-6} \cdots} \right)^2} - 1$$

Una vez calculadas las alturas de los n triángulos procederemos a calcular las áreas de dichos triángulos. Esto es simplemente el área de un triángulo (A=b·h/2).

Para T1 tenemos $A_1 = \frac{b_1 h_1}{2}$, y según (1) se tiene (sustituyendo b_1 por su relación con h_1): $A_1 = h_1^2$.

Para T2 $A_2 = \frac{b_2 h_{12}}{2} = \frac{2h_2^2}{b_1} = \frac{h_2^2}{h_1}$ (habiendo hecho ya la sustitución establecida en (4)).

Es decir, para Tn tenemos

$$A_n = \frac{h_n^2 h_{n-2} h_{n-4} \cdots}{h_{n-1} h_{n-3} h_{n-5} \cdots} \quad (5)$$

Ahora bien, sabemos que (2) es un despeje de $(h_2 + 1)^2 = \left(\frac{b_1}{2}\right)^2 + 1$, que expresado de otra manera resulta $h_2^2 + 2h_2 - h_1^2 = 0$. A su vez (3) sale de $h_3^2+2h_3-h_2^2=0$; es decir, en general $h_{n-1}^2=2h_n+h_n^2$. Con esto (5) queda de la siguiente forma:

$$A_n = \frac{h_n^2}{\sqrt{h_n^2 + 2h_n}} \quad (6)$$

Ya con esto tenemos las áreas de n triángulos. Como se dijo al principio, π sería el área del cuadrado, que es 4, menos las áreas de los infinitos triángulos considerados. Notar que estos cálculos se han hecho para un cuadrante, por lo que bastará con multiplicar por 4 las áreas de los triángulos para tener así el área de la circunferencia, que es π. Es decir:

$$4 - (4A_1 + 8A_2 + 16A_3 + 2^{n+1}A_n) = \pi(n)$$

donde se ha tenido en cuenta que hay en el primer cuadrante 1 triángulo T1 (4 en total), 2 de T2 (8 en total),... tal que para Tn hay 2^{n-1} (que por 4 resulta 2^{n+1}).

Expresando la suma de áreas mediante una sumatoria queda la expresión:

$$4 - \left(\sum_{1}^{n} 2^{n+1} A_n \right) = \pi$$

$$\pi(n) = 4 - \sum_{1}^{n} \left(2^{n+1} \frac{h_n}{\sqrt{h^2{}_n + 2h_n}} \right)$$

(En esta última expresión hemos sustituido el valor de A_n por el calculado anteriormente en (6)).

Para n➔∞ tendremos el valor de π.

En la siguiente tabla se muestra los valores de h_n y π(n) para los distintos valores de n:

$h_1 = 0.41421356237309504880168872421$	$\pi(1) = 3.31370849898476039041350$
$h_2 = 0.08239220029239396879944641073$	$\pi(2) = 3.1825978780745281105855$
$h_3 = 0.01959115820831833788387960797$	$\pi(3) = 3.15172490742925609847032$
$h_4 = 0.00483857237631141102334023856$	$\pi(4) = 3.14411838524590426274197$
$h_5 = 0.00120599647039260269100821354$	$\pi(5) = 3.14222362994245684538620$
$h_6 = 0.0003012720413019764295202543$	$\pi(6) = 3.14175036916896645910721$
$h_7 = 0.00007530383109544593556278156$	$\pi(7) = 3.14163208070318180571871$
$h_8 = 0.00001882507177551353025740938$	$\pi(8) = 3.14160251025680946763689$
$h_9 = 0.00000470621257216102802534342$	$\pi(9) = 3.14159511774958905035309$
$h_{10} = 0.00000117654968235759737053462$	$\pi(10) = 3.1415932696293073107894$
$h_{11} = 0.00000029413720429750927596568$	$\pi(11) = 3.1415928075996445765282$
$h_{12} = 0.00000007353428755614631728801$	$\pi(12) = 3.1415926920922543742284$
$h_{13} = 0.00000001838357104414733120697$	$\pi(13) = 3.1415926632154084162321$
$h_{14} = 0.00000000459589270823125775535$	$\pi(14) = 3.1415926559961970262692$
$h_{15} = 0.0000000011489731737546604470$	$\pi(15) = 3.1415926541913941849995$
$h_{16} = 0.00000000028724329323309473727$	$\pi(16) = 3.1415926537401934750709$

Como era de esperar nos acercamos al valor de π cuanto más grande es el valor de n.

Y la tabla presentada a continuación muestra el valor de $\pi(n)$ y el error cometido; es decir, el valor absoluto de π- $\pi(n)$:

$\pi(n)$	$\lvert\pi - \pi(n)\rvert$
$\pi(1) = 3.31370849894760390413500$	**$1.72115845 \times 10^{-1}$**
$\pi(2) = 3.18259787807452811058550$	**$4.10052245 \times 10^{-2}$**
$\pi(3) = 3.15172490742925609847032$	**$1.01322538 \times 10^{-3}$**
$\pi(4) = 3.14411838524590426274197$	**$2.52573166 \times 10^{-3}$**
$\pi(5) = 3.14222362994245684538620$	**$6.30976353 \times 10^{-4}$**
$\pi(6) = 3.14175036916896645910721$	**$1.57715579 \times 10^{-4}$**
$\pi(7) = 3.14163208070318180571871$	**$3.94271134 \times 10^{-5}$**
$\pi(8) = 3.14160251025680946763689$	**$9.85666702 \times 10^{-6}$**
$\pi(9) = 3.14159511774958905035309$	**$2.46390610 \times 10^{-6}$**
$\pi(10) = 3.1415932696293073107894$	**$6.16039514 \times 10^{-7}$**
$\pi(11) = 3.1415928075996445765282$	**$1.54009852 \times 10^{-7}$**
$\pi(12) = 3.1415926920922543742284$	**$3.85024612 \times 10^{-8}$**
$\pi(13) = 3.1415926632154084162321$	**$9.62561542 \times 10^{-9}$**
$\pi(14) = 3.1415926559961970262692$	**$2.37517694 \times 10^{-9}$**
$\pi(15) = 3.1415926541913941849995$	**$5.69346348 \times 10^{-10}$**
$\pi(16) = 3.1415926537401934750709$	**$1.50400581 \times 10^{-10}$**

DISTINTAS EXPRESIONES DE π:

POR ARQUIMEDES:

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{10}{70}$$

****

POR FRANCOIS VIETE:

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{2}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{2}}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{2}}}}\cdots$$

****

POR JOHN WALLIS

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\frac{2}{3}\frac{4}{3}\frac{4}{3}\frac{6}{5}\frac{6}{5}\frac{8}{7}\frac{8}{7}\cdots$$

****

POR ISAAC NEWTON

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 3}\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5}\left(\frac{1}{2}\right)^5 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7}\left(\frac{1}{2}\right)^7 + \cdots$$

****

POR GOTTFRIED LEIBNITZ

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \cdots$$

****

POR LEONARD EULER

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots$$

$$\frac{\pi^4}{90} = 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} + \cdots$$

………………………………………………………………………………………

$$\frac{\pi}{4}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{3^2}{2+\cfrac{5^2}{2+\cfrac{7^2}{2+\cfrac{9^2}{2+\cdots}}}}}}$$

****

POR SHANKS

$$\frac{\pi}{4}=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3\cdot 2^2}+\frac{1}{5\cdot 2^5}-\frac{1}{7\cdot 2^7}+\cdots\right)-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3\cdot 3^2}+\frac{1}{5\cdot 3^5}-\frac{1}{7\cdot 3^7}\cdots\right)$$

****

POR BROUNCKER

$$\frac{4}{\pi}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{3^2}{2+\cfrac{5^2}{2+\cfrac{7^2}{2+\cfrac{9^2}{2+\cdots}}}}}$$

****

POR RAMANUJAN

$$y_0=\sqrt{2}-1,\quad y_{n+1}=\frac{1-\sqrt[4]{1-(y_n)^4}}{1+\sqrt[4]{1-(y_n)^4}},\quad \alpha_0=6-4\sqrt{2},$$

$$\alpha_{n+1}=(1+y_{n+1})^4\cdot\alpha_n-2^{2n+3}\cdot y_{n+1}\cdot\left(1+y_{n+1}+(y_{n+1})^2\right)$$

……………………………………………………………………………………………

$$\frac{1}{\pi}=\frac{2\sqrt{2}}{9801}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(4k)!(1103+26390k)}{(k!)^4\,396^{4k}}$$

****

POR MACHIN

$$\pi = 16\arctan(1/5) - 4\arctan(1/239)$$

****

$$\pi = \sum 2^{n+1} \cdot \tan\left(\frac{P_0}{2^{n+1}}\right)\left(\tan\left(\frac{P_0}{2^{n+2}}\right)\right)^2 \quad P_0 = 22/7$$

(Enfoque trigonométrico)

RECURSOS UTILIZADOS PARA ELBORAR EL TRABAJO:

- Triángulos semejantes:

http://www.pntic.mec.es/Descartes/4a_eso/Triangulos_semejantes/Triangulos%20semejantes.htm

- Demostración de Eloy Conchillo: http://webs.adam.es/rllorens/pihome.htm
- Demostración de Fernando Valdés : http://webs.adam.es/rllorens/pihome.htm
- Distintas expresiones de π: http://webs.adam.es/rllorens/pihome.htm

La explicación del TEOREMA DEL COSENO es de redacción propia.

Se recomienda visitar la última dirección facilitada, ya que está prácticamente dedicada entera al número π y contiene más demostraciones, historia del número, anécdotas,...

FIN