“A New Wrinkle on an Old Folding Problem”

Oliver N. Santana Martín
oliver.sm@gmail.com
“Como Resolver Problemas”
Curso 2005-06

"A New Wrinkle on an Old Folding Problem"

Greg N. Frederickson

- Profesor de Informática de la Universidad de Purdue.

- Área de diseño y análisis de algoritmos.

"The Box Problem"

- Es una variación de un viejo problema que consistía en formar una cuarta parte de una caja abierta. *(siglo XVII)*

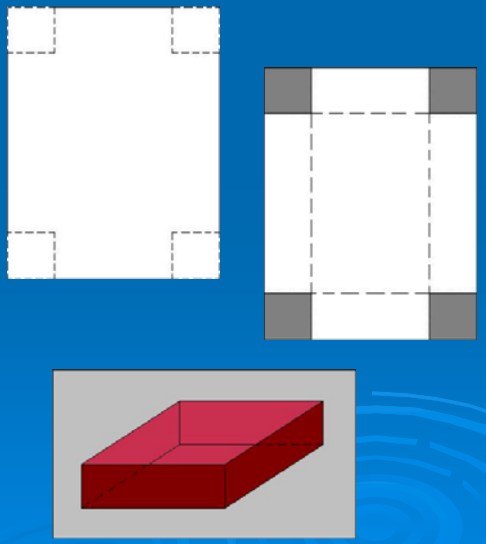
- Apareció por primera vez publicado en la revista *"The Weekly Dispatch"* por Henry Dudeney's. La solución sería publicada dos semanas después. (1903)

- En 1908 apareció una nueva versión ilustrada en *"Cassell's Magazine".*

“The Box Problem”

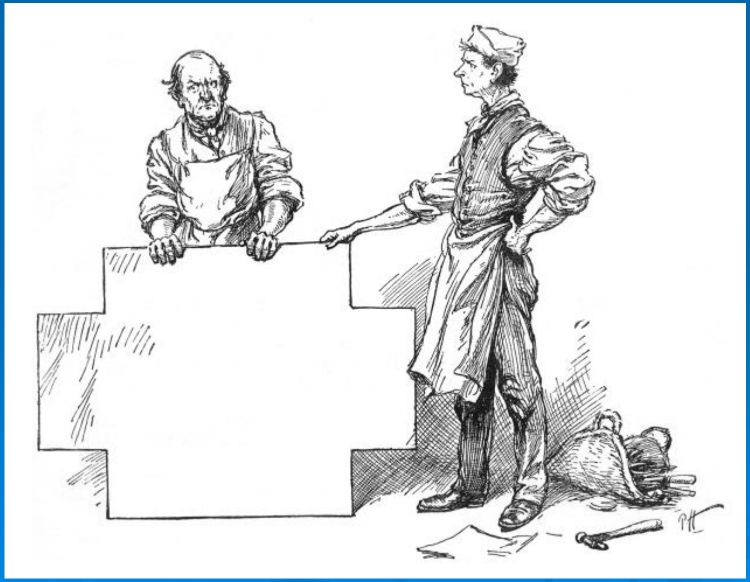
OBJETIVO:

- Hallar el volumen máximo de una caja abierta que se pueda formar a partir de una lámina rectangular de la siguiente forma:
  - *Cortar cuadrados de las esquinas.*
  - *Plegar los lados.*
  - *Por último soldar las uniones.*



“The Box Problem”

- El enunciado publicado fue el siguiente:
  - *“Dada una lámina rectangular de zinc, ¿como podría el trabajador cortar un cuadrado de cada esquina de tal forma que los cuatro lados se plieguen y formen una cisterna que contenga la mayor cantidad de agua posible?”*



“The Box Problem”

- La solución publicada se divide en cuatro pasos:

  (ejemplo para una lámina de 8x3)

  1) *Restar el producto de los lados a la suma de sus cuadrados.*

     *(64+9)-(8*3) = 49*

  2) *Hallar la raíz cuadrada del resultado.*

     La raíz cuadrada de 49 es 7.

  3) *Restar dicha raíz cuadrada a la suma de los lados.*

     (8+3)-7 = 4

  4) *Dividir el resultado por 6.*

     El lado del cuadrado a recortar será 4/6 = 0.6666…

"The Box Problem"

- Es fácil resolver este problema mediante cálculo:
  - Sean *a* y *b* las dimensiones de la lámina.
  - Sea *x* el lado de los cuadrados a recortar.

a) Hallar el volumen de la cisterna en función de *a*, *b* y *x* :

$$(a - 2x)(b - 2x)x = 4x^3 - 2ax^2 - 2bx^2 + abx$$

b) Hallar la primera derivada respecto de *x* :

$$12x^2 - 4ax - 4bx + ab$$

c) Igualar a 0 y aplicar la fórmula cuadrática:

$$\boxed{x = \frac{a + b - \sqrt{a^2 + b^2 - ab}}{6}} \Longleftrightarrow$$

El método que Dudeney describe en 4 pasos es equivalente a esta fórmula.

"The Box Problem"

- Es una buena aplicación de cálculo que conduce a una variedad de interesantes problemas.
- Algunos lo consideraron un problema estúpido desde un punto de vista práctico.
- *John Friedlander* and *John Wilker* observaron que las esquinas eran inútiles, idea que usaron para aplicar la misma técnica recursivamente a los cuadrados resultantes, generando una sucesión infinita de cajas cuyo volumen total sería máximo.
- Aunque puede ser bueno tener una gran colección de cajas y al mismo tiempo evitar las partes inútiles, parece ser mejor tener solo una cisterna para mantener el agua.

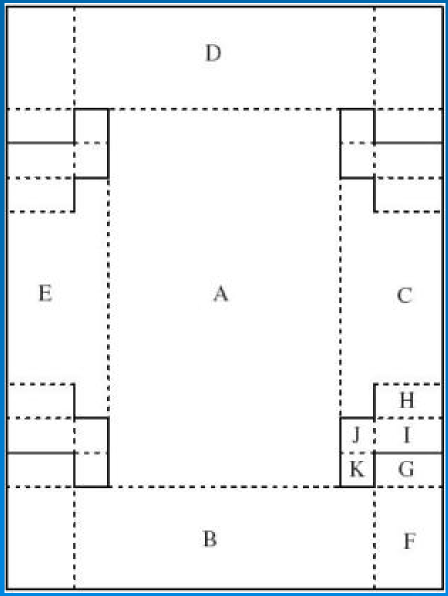
¿Quién dice que una cisterna debe ser rectangular?

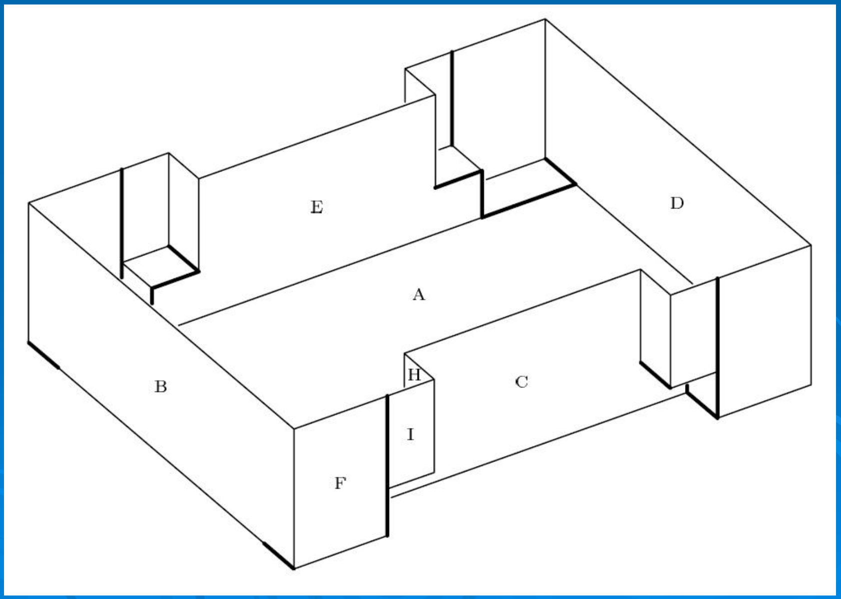
"The Box Problem"

- Greg Frederickson plantea una nueva versión del problema cuyo objetivo es:
  - Hallar un contenedor de cualquier forma, abierto por la tapa superior, formado a partir de una lámina de metal rectangular mediante cortes y soldaduras de manera que su volumen sea máximo.
  - Para mantener las características de la versión original del problema se requiere que todo el material usado en el contenedor quede conectado después de los cortes.
  - Para facilitar el problema, se consideran solo contenedores cuyas superficies son paralelas a las caras de un cubo y tienen el mismo grosor.

“The Box Problem”

- Frederickson halló una solución mejor a la planteada por Friedlander y Wilker y aun más a la original de Dudeney.
- A partir de una lámina similar a la anterior, en la siguiente imagen podemos ver el resultado representando los cortes con líneas continuas y los pliegues con líneas discontinuas:

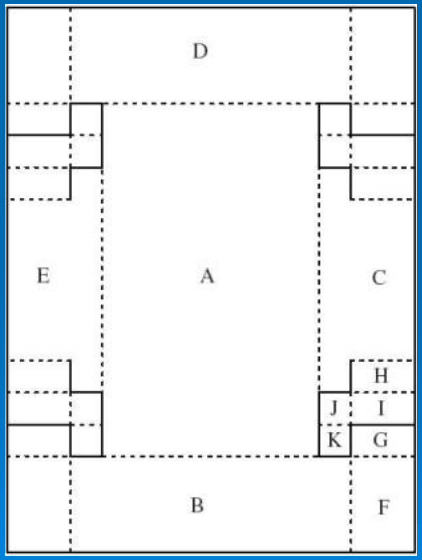




“The Box Problem”

- Como ya no tenemos cuadrados a descartar, llamaremos *x* a la altura de la cisterna resultante.

- El volumen será: $$(a-2x)(b-2x)x+4\left(\frac{8x^3}{27}\right)=\frac{140x^3}{27}-2ax^2-2bx^2+abx$$



$\Downarrow$ * *Primera derivada*

$$\frac{140x^2}{9}-4ax-4bx+ab$$

$\Downarrow$ * *Despejando*

Altura: $$\boxed{x=\left(\frac{9}{70}\right)\left(a+b-\sqrt{a^2+b^2-\frac{17ab}{9}}\right)}$$

"The Box Problem"

CONCLUSIONES:

- El nuevo método obtiene mejores resultados cuando los valores *a* y *b* son iguales (cuadrado), mientras que pierde parte de su ventaja cuando sus valores son distantes.
- Para un cuadrado 1x1 (a=1,b=1) se obtiene:
  - Método Friedlander-Wilker: $x \approx 0.1736$ volumen ≈ 0.7556
  - Método Dudeney: $x \approx 0.1666$ volumen ≈ 0.7407
  - Método Frederickson: $x \approx 0.2142$ volumen ≈ 0.8163
- El nuevo método supera al de Friedlander-Wilker en un *8%* y al de Dudeney en un *10%*.
- Para *a=3* y *b=8* *(valores originales del problema)* obtenemos una mejora de más del *5%* frente a Dudeney:
  - Dudeney: $x \approx 0.6666$ volumen ≈ 7.4074
  - Frederickson: $x \approx 0.7381$ volumen ≈ 7.8140

“The Box Problem”

BIBLIOGRAFÍA:

- Trabajo basado en el artículo:
  - *“A New Wrinkle On An Old Folding Problem”*

por Greg Frederickson

FIN